

Vraagstukken Differentiaalmeetkunde; Sinterklaas 1949

1. In een geconcentreerde  $\hat{C}_n$  kan iedere willekeurige  $\hat{E}_m$  vastgelegd worden door  $m(n-m)$  getallen.

2. Door de vergelijking

$$P_{k\lambda} Q^{\mu\nu}{}_{\omega} = R^{\mu\nu}{}_{k\lambda\omega}$$

worden bij gegeven  $R$  de grootheden  $P$  en  $Q$  vastgelegd op een scalaire factor na.

3. Indien voor een affinor  $V_{\lambda k}$  de vergelijking  $\alpha V_{\lambda k} + \beta V_{k\lambda} = 0$ ;  $\alpha$  en  $\beta$  getallen geldt ten opzichte van  $(K)$ , dan geldt dezelfde vergelijking ten opzichte van ieder ander coördinatenstelsel en er zijn slechts twee mogelijkheden  $\alpha = \beta$  en  $\alpha = -\beta$ .

4. Zijn  $P_{\lambda k}$ ,  $Q^{k\lambda}$  en  $R^k_{\lambda}$  affinoren dan geldt

$$\text{Det}(P_{\lambda k}) = \text{scalaire } \Delta \text{ -dichtheid gewicht } + 2.$$

$$\text{Det}(Q^{k\lambda}) = \text{scalaire } \Delta \text{ -dichtheid gewicht } - 2.$$

$$\text{Det}(R^k_{\lambda}) = \text{scalar}.$$

Is  $\mathcal{P}^k_{\lambda}$  een affinor- $\Delta$ -dichtheid van het gewicht  $K$  dan is  $\text{Det}(\mathcal{P}^k_{\lambda})$  een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht  $nK$ . Is  $\mathcal{P}_{\lambda k}$  een affinor van het gewicht  $K$  dan is  $\text{Det}(\mathcal{P}_{\lambda k})$  een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht  $nK + 2$ .

5. Een  $(n-1)$ -vector is altijd enkelvoudig.

6. Is  $v^{k_1 \dots k_m}$  een  $m$ -vector, dan geldt

$$v^{k_1 \dots k_m} \varepsilon^{k_{m+1} \dots k_n \lambda_1 \dots \lambda_m} = \binom{n}{m} v^{[\lambda_1 \dots \lambda_m} \varepsilon^{k_{m+1} \dots k_n]} v^{k_1 \dots k_m}$$

(Schrijf het  $1 \dots m 1 \dots n$  -kental uit).

7. Bewijs dat

$$A^{\lambda}_{k'} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial A^k_{\lambda}} ; \Delta = \text{Det}(A^k_{\lambda})$$

voor iedere waarde van  $k'$  en  $\lambda$ . Geef een dergelijk verband aan tussen  $g^{k\lambda}$ ,  $g_{\lambda k}$  en  $g = \text{Det}(g_{\lambda k})$ .

8. Bewijs voor  $n=4$  dat iedere bivector een som is van twee enkelvoudige bivectoren. Wat is de rang van een enkelvoudige bivector voor  $n$  algemeen.

9. Bewijs dat

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_m k_{m+1} \dots k_n} e^{i_1 \dots i_m \lambda_{m+1} \dots \lambda_n} = m!(n-m)! A^{[k_{m+1} \dots k_n]}_{[\lambda_{m+1} \dots \lambda_n]}$$

ZW

zo mogelijk algemeen maar althans voor bijv.  $n=4$ ,  $m=2$ .

10.  $P^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}$  is een affinor. Bewijs dat  $P^{\kappa\mu}{}_{\nu\lambda}$  zich inderdaad transformeert als een affinor van de valentie 2.

11. Bewijs dat

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \partial_\mu \log g$$

(gebruik de betrekking tussen  $g^{\kappa\lambda}$ ,  $g_{\lambda\kappa}$  en  $g$ ).

12.  $w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  is een  $n$ -vector. Bewijs dat

$$\delta w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = dw_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - n \left[ \Gamma_{\mu[\lambda_1}^{\rho} w_{\rho \lambda_2 \dots \lambda_n]} \right] d\xi^\mu$$

1. Krommen in  $R_3$ . 1)  $R_3$  is de gewone driedimensionale ruimte;  $x^h$   $h = 1, 2, 3$  zijn de coördinaten v.e. punt t.o.v. cartesisch (d.i. orthogonaal rechtlijnig) coördinatenstelsel. Met  $x^h$  is ook bedoeld de vector, die zich van de oorsprong tot het punt met de coördinaten  $x^h$  uitstrekt. ( $\sum x^h x^h$ ) heet de lengte van deze vector. Gaat men verder tot een ander cartesisch stelsel  $x^{h'}$ ;  $h' = 1', 2', 3'$  met dezelfde oorsprong dan ondergaan de  $x^h$  een lineaire transformatie

$$1.1) \quad x^{h'} = A_{h'}^{h'} x^h \quad h = 1, 2, 3, \quad h' = 1', 2', 3'$$

met constante coëfficiënten  $A_{h'}^{h'}$ . Omdat de lengte niet verandert is  $\sum_k x^{h'} x^{h'} = \sum_k x^h x^h$ , hetgeen dan en dan alleen mogelijk is indien

$$1.2) \quad \sum_h A_{h'}^{h'} A_{h''}^{h'} = \delta_{h''}^{h'}$$

$\delta_{ij}$  in het Kronecker symbool dat 1 voorstelt voor  $i=j$  en 0 voor  $i \neq j$  en dat we later ook in de vormen  $\delta_i^i$  en  $\delta^{ii}$  tegenkomen. (1.2) is karakteristiek voor een orthogonale coördinatentransformatie  $(h) \rightarrow (h')$ . We noemen nu bij deze orthogonale groep ieder stelsel van 3 getallen een vector, indien <sup>die</sup> getallen zich volgens (1.1) transformeren, bijv.

$$1.3) \quad v^{h'} = A_{h'}^{h'} v^h$$

De  $v^h$  heten kentallen v.d. vector t.o.v.  $(h)$ . De invariant  $\sqrt{\sum v^h v^h}$  is de lengte van  $v^h$ .  $x^h$  als vector opgevat heet de radiusvector. Een vergelijking van de vorm

$$1.4) \quad x^h = f^h(t)$$

waarin de  $x^h$  gegeven worden als functies <sup>3)</sup> van een parameter  $t$  stelt een kromme in  $R_3$  voor. Zijn  $x^h$  en  $x^h + dx^h$  twee punten van de kromme, dan heet  $dx^h$  het lijnelement van de kromme.

1) In de eerste § wordt met opzet eerst de meest naïeve notatie gebruikt zonder aanwending der vele bestaande afkortingsmogelijkheden.

2) Over twee gelijke indices, de een boven en de ander onder die in dezelfde term voorkomen wordt automatisch gesommeerd zonder dat het teken  $\sum$  wordt gebruikt.

3) We veronderstellen voortaan stilzwijgend dat alle voorkomende functies in een zekere omgeving continu en een voldoende aantal malen differentieerbaar zijn en ~~werken~~ alleen in die omgeving. Soms moet analyticititeit gebruikt worden.

Voor de lengte van  $dx^h$  schrijven we  $ds$ :

$$1.5) \quad ds = \sqrt{\sum dx^h dx^h}$$

Bij een reële kromme kan het niet voorkomen dat ergens  $ds = 0$  is. Is  $P$  een willekeurig punt van een reële kromme en  $Q$  een ander dergelijk punt dan is

$$1.6) \quad s \stackrel{\text{def}}{=} \int_P^Q ds$$

de lengte van de boog  $PQ$ . Blijkbaar is  $s$  een functie van  $t$  en  $t$  een functie van  $s$ . Ook  $s$  kan als parameter gebruikt worden en heet een natuurlijke parameter van de kromme:

$$1.7) \quad x^h = \varphi^h(s)$$

We onderstellen dat de functies  $\varphi^h$  in het beschouwde gebied continu en een voldoende aantal malen differentieerbaar zijn.

De differentiatie levert een vector

$$1.8) \quad j_1^h = \frac{dx^h}{ds} \quad ')$$

Aangezien  $ds$  de lengte van  $dx^h$  is, is  $j_1^h$  een eenheidsvector (vector van de lengte 1) genaamd de tangentiale eenheidsvector van de kromme.

Door de kromme alleen is  $j_1^h$  slechts op het teken na bepaald. Het teken wordt pas vastgelegd door de zin van aangroeiing van  $s$ .

Twee vectoren  $u^h$  en  $v^h$  zijn loodrecht op elkaar indien

$$1.9) \quad \sum u^h v^h = 0$$

Een reële vector kan dus nooit loodrecht op zichzelf zijn. Is  $u^h$  een eenheidsvector, dan is

$$1.10) \quad 0 = d \sum u^h u^h = 2 \sum u^h du^h$$

zodat een eenheidsvector en zijn differentiaal steeds loodrecht op elkaar staan. Past men dit toe op  $j_1^h$  dan volgt  $dj_1^h \perp j_1^h$ . Men kan derhalve steeds een eenheidsvector  $j_2^h$  zodanig kiezen dat

$$1.11) \quad \frac{dj_1^h}{ds} = k_1 j_2^h ; \quad k_1 \geq 0$$

De zin " van  $j_2^h$  is door de onderstelling  $k_1 > 0$  volledig vastgelegd.

' ) Er wordt in het vervolg onderscheid gemaakt tussen cursieve getalindices  $1, 2, 3$  en verticale getalindices  $1, 2, 3$ .

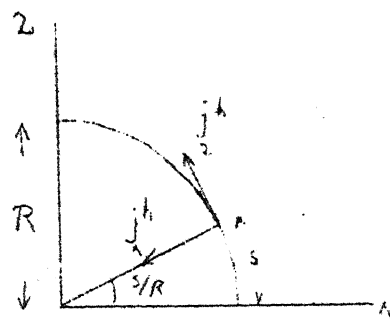
" ) Er wordt onderscheid gemaakt tussen richting en zin. Een lijn heeft een richting, een lijn met een pijl er in ook een zin. Een vlak heeft een  $\lambda$ -richting, een vlak met een draaipijl of met een pijl er doorheen heeft ook een zin.



Een uitzondering bestaat voor  $\frac{dj^h}{ds} = 0$ . Dan is er geen bepaalde  $j^h$ . Een punt waar dit gebeurt heet een inflexiepunt, en men zegt ook dat de raaklijn daar stationnair wordt. Zijn alle punten inflexiepunten dan is de kromme blijkbaar een rechte lijn wat de richting van  $j^h$  verandert helemaal niet. In een geïsoleerd inflexiepunt kiest men  $j^h$  zo mogelijk zo, dat  $j^h$  als functie van  $s$  continu en differentieerbaar blijft. Geldt dit niet, dan wordt het punt uitgesloten.  $k$  heet de eerste kromming van de kromme en het vlak van  $j^h$  en  $j^h$  heet osculatievlak.

Een cirkel met straal  $R$  en middelpunt in  $O$  kan gegeven worden door de parametervergelijkingen

$$\begin{aligned} 1.12) \quad x^1 &= R \cos \frac{s}{R} \\ x^2 &= R \sin \frac{s}{R} \\ x^3 &= 0 \end{aligned}$$



Voor dit geval is

$$1.13) \quad j^1 = -\sin \frac{s}{R}; \quad j^2 = \cos \frac{s}{R}$$

en

$$1.14) \quad j^1 = -\cos \frac{s}{R}; \quad j^2 = -\sin \frac{s}{R}$$

en  $k = \frac{1}{R}$ . Men noemt daarom wel  $\frac{1}{k}$  de kromtestraal van de kromme en de cirkel met straal  $\frac{1}{k}$  in het osculatievlak die de kromme raakt en aan de "holle" zijde ligt de osculatiecirkel. De "holle" zijde is de zijde waarheen de vector  $j^h$  wijst. Is  $\frac{dj^h}{ds} = 0$ , dan wordt  $k = 0$ , de

kromtestraal oneindig, de osculatiecirkel een rechte lijn en er is geen "holle" zijde. De normaal in de richting van  $j^h$  wordt wel eerste normaal of loofnormaal genoemd.

Differentieert men door, dan is het zeker dat  $\frac{dj^h}{ds} \perp j^h$ . Deze vector moet dus liggen in het vlak van  $j^h$  en van een derde eenheidsvector  $j^h$  loodrecht op raaklijn en eerste normaal. De normaal in de richting van  $j^h$  heet medenormaal of binormaal.

De zin van deze vector ligt niet vast, maar kan worden vastgelegd door de (willekeurige) conditie dat  $j^h$ ,  $j^h$  en  $j^h$  een rechts stelsel vormen (of een links stelsel). Dan ligt de coëfficiënt  $k$  in de vergelijking

$$1.15) \quad \frac{dj^h}{ds} = -k j^h + k j^h$$

vast. De coëfficiënt van de eerste term rechts volgt automatisch uit (1.11) en het feit dat  $j^h \perp j^h$   $k$  heet tweede kromming of torsie, en  $\frac{1}{k}$  torsiestraal. De torsie kan dus ook negatief zijn. Dit hangt er

van af, of de kromme in de omgeving van het beschouwde punt een rechtse of een linkse schroef is. Men kan echter ook  $k_1$  altijd positief nemen en daarmee de zin van  $j^h$  vastleggen. De kromme is dan rechts (links) geworden indien  $j_1^h$ ,  $j_2^h$  en  $j_3^h$  een rechts (links) stelsel vormen. Het kan zijn dat  $k_1$  ergens nul is. Dan zegt men dat in dat punt het osculatievlak stationnair is. Is dit overal het geval, dan is de kromme een vlakke kromme gelegen in een vlak // aan  $j_1^k$  en  $j_2^k$ .

Differentieert men nog eens, dan volgt

$$1.16) \quad \frac{dj_1^h}{ds} = -k_1 j_1^h$$

omdat  $j_1^h \perp j_2^h$  en  $j_2^h \perp j_3^h$ . (1.11), (1.15) en (1.16) zijn de formules van Serret-Frenet.

Zij nu  $x^h$  het punt van de kromme waar  $s = 0$ . Zijn dan de  $\phi^h(s)$  analytisch in  $s = 0$ , dan is

$$1.17) \quad x^h = s \left( \frac{dx^h}{ds} \right)_{s=0} + \frac{1}{2} s^2 \left( \frac{d^2 x^h}{ds^2} \right)_{s=0} + \frac{1}{6} s^3 \left( \frac{d^3 x^h}{ds^3} \right)_{s=0} + \dots$$

Is in  $x^h$

$$1.18) \quad j_1^h = i_1^h; \quad j_2^h = i_2^h; \quad j_3^h = i_3^h$$

waarin

$$1.19) \quad i_j^h = \begin{cases} 1 & \text{voor } j = h \\ 0 & \text{voor } j \neq h \end{cases}$$

dan zijn  $i_1^h$ ,  $i_2^h$  en  $i_3^h$  de drie eenheidsvectoren langs de assen van het stelsel (h) in  $x^h = 0$ . Door transformatie van het coördinatenstelsel kan men dat altijd bereiken. Dan is verder

$$1.20) \quad \begin{aligned} \left( \frac{dx^h}{ds} \right)_{s=0} &= i_1^h \\ \left( \frac{d^2 x^h}{ds^2} \right)_{s=0} &= k_1^0 i_2^h \\ \left( \frac{d^3 x^h}{ds^3} \right)_{s=0} &= -k_1^2 i_1^h + \left( \frac{dk_1}{ds} \right)_0 i_2^h + k_1^0 k_2^0 i_3^h \end{aligned}$$

en men kan zo voortgaande alle afgeleiden berekenen. Worden deze gesubstitueerd in (1.17) dan ontstaat een reeksontwikkeling, die onder gunstige omstandigheden convergeert:

$$1.21) \quad x^h = s i_1^h + \frac{1}{2} k_1^0 s^2 i_2^h - \frac{1}{6} k_1^2 s^3 i_1^h + \frac{1}{6} \left( \frac{dk_1}{ds} \right)_0 s^3 i_2^h + \frac{1}{6} k_1^0 k_2^0 s^3 i_3^h + \dots$$

of  $x^1 = s + 0 - \frac{1}{6} k_1^2 s^3 - \frac{1}{8} k_1 \left( \frac{dk_1}{ds} \right) s^4 + \dots$

1.22)  $x^2 = 0 + \frac{1}{2} k_1^2 s^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{dk_1}{ds} \right) s^3 + \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{d^2 k_1}{ds^2} \right) - k_1^3 - \frac{k_1^2}{12} \right\} s^4 + \dots$

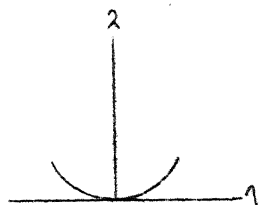
$x^3 = 0 + 0 + \frac{1}{6} k_1^2 k_1 s^3 + \frac{1}{24} \left\{ 2 \left( \frac{dk_1}{ds} \right) k_1 + k_1 \left( \frac{dk_1}{ds} \right) \right\} s^4 + \dots$

Hieruit volgt dus, dat een kromme door  $k_1$  en  $k_2$  te geven als functies van  $s$ , onder zekere voorwaarden betreffende convergentie \*) volledig vastgelegd is op verdraaiingen en verschuivingen in  $R_3$  na. Vandaar dat men de vergelijkingen

1.23)  $\begin{aligned} k_1 &= \psi(s) \\ k_2 &= \chi(s) \end{aligned}$

wel de natuurlijke vergelijkingen van de kromme noemt.

Het is interessant telkens twee van de vergelijkingen (1.22) samen te vatten als de vergelijkingen der projectie op het 23- of 31- of 12-vlak. Dan komt er voor het osculatievlak = 12-vlak in eerste benadering,

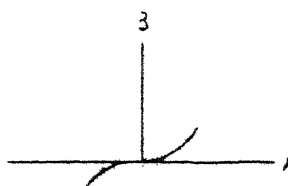


1.24)  $x^2 = \frac{1}{2} k_1^2 (x^1)^2,$

dat is dus een parabool. Voor het 31-vlak komt er in eerste benadering

1.25)  $x^3 = \frac{1}{6} k_1^2 k_2 (x^1)^3,$

dat is dus een kromme met een buigpunt. Vandaar dat dit vlak, loodrecht op de normaal ook rectificerend vlak heet.



Voor het normaalvlak = 23-vlak komt er in eerste benadering

1.26)  $(x^3)^2 = \frac{2}{9} k_2^2 / k_1^2 (x^2)^3$

en dit is een kromme met een spits (geen snavelspits, maar hellebaardspits). Dit alles geldt natuurlijk voor een algemeen punt van de kromme waar noch  $k_1$  noch  $k_2$  nul wordt. Voor deze gevallen kan men andere projecties verkrijgen door een term verder te gaan met de reeksontwikkelingen. Bijv. verkrijgt men voor  $k_1 = 0$  in het 12-vlak een kromme met een buigpunt.

\*) Een ander bewijs, dat minder onderstelt, volgt later.

Heeft men twee krommen

$$1.27) \quad x^h = f^h(s) \quad ; \quad 0 = f^h(0)$$

en

$$1.28) \quad x^h = \varphi^h(s) \quad ; \quad 0 = \varphi^h(0)$$

dan kan men beide stelsels van functies in de nabijheid van  $s = 0$  in een reeks ontwikkelen

$$1.29) \quad \begin{aligned} a) \quad x^h &= s u_1^h + s^2 u_2^h + s^3 u_3^h + \dots \\ b) \quad x^h &= s v_1^h + s^2 v_2^h + s^3 v_3^h + \dots \end{aligned}$$

met constante (d.i. hier van  $s$  onafhankelijke) coëfficiënten  $u_1^h, \dots, v_1^h, \dots$ . Bij differentiatie vindt men dan

1<sup>e</sup> kromme voor  $s = 0$

2<sup>e</sup> kromme voor  $s = 0$

$$1.30) \quad \begin{aligned} j_1^h &= u_1^h \\ k j_2^h &= 2u_2^h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_1^h &= v_1^h \\ k j_2^h &= 2v_2^h \end{aligned}$$

$$-k_1^2 j_1^h + \frac{dk}{ds} j_2^h + k k_2 j_3^h = 6u_3^h$$

$$-k_1^2 j_1^h + \frac{dk}{ds} j_2^h + k k_2 j_3^h = 6v_3^h$$

Daaruit volgt:

voor  $u_1^h = v_1^h$  hebben beide krommen in  $x^h = 0$  dezelfde raaklijn. Is bovendien  $u_2^h = v_2^h$  dan hebben ze ook dezelfde normaal, hetzelfde osculatievlak en dezelfde eerste kromming in  $x^h = 0$ . Is bovendien  $u_3^h = v_3^h$ , dan hebben ze ook dezelfde torsie in  $x^h = 0$ . Men zei vroeger zeer slordig dat de krommen in zeze gevallen twee, drie of vier "naburige punten" gemeen hadden. Tegenwoordig vermijdt men deze uitdrukking die inderdaad niets betekent en spreekt men van een aanraking van de  $n^{\text{de}}$  orde als in de reeksontwikkeling (1.29) de coëfficiënten van de eerste  $n$  termen gelijk zijn. Aanraking van de nulde orde staat dus gelijk met gewoon snijden.

Passen we dit toe op de osculatiecirkel van de kromme (1.21). De cirkel met straal  $R$

1.31)

$$x^1 = R \sin \frac{s}{R}$$

$$x^2 = R - R \cos \frac{s}{R}$$

$$x^3 = 0$$

ligt in het osculatievlak en raakt de kromme in  $x^h = 0$ . Ontwikkelt men  $\cos \frac{s}{R}$  en  $\sin \frac{s}{R}$  in een reeks dan ontstaat

$$1.32) \quad \begin{aligned} x &= s - \frac{1}{6R^2} s^3 + \frac{1}{120R^4} s^5 + \dots \\ x^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{R} s^2 - \frac{1}{24} \frac{1}{R} s^4 + \dots \\ x^3 &= 0 \end{aligned}$$

en hieruit volgt bij vergelijking met (1.22) dat een aanraking van de tweede orde bestaat voor  $R = \frac{1}{k}$ , dat is juist het geval van de osculatiecirkel.

Stel dat men een kromme en een oppervlak heeft met de vergelijkingen

$$1.33) \quad x^h = f^h(s) \text{ en } F(x^h) = 0$$

dan ligt de kromme geheel op het oppervlak, indien voor alle waarden van  $s$  in het beschouwde gebied

$$1.34) \quad \Phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} F(f^h(s)) = 0$$

De kromme en het oppervlak hebben het punt  $x_s^h = f^h(s)$  gemeen indien

$$\Phi(s) = 0$$

Is bovendien

$$1.35) \quad \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_0} = 0; \dots; \left(\frac{d^n \Phi}{ds^n}\right)_{s=s_0} = 0; \left(\frac{d^{n+1} \Phi}{ds^{n+1}}\right)_{s=s_0} \neq 0,$$

dan zegt men dat een aanraking van de orde  $n$  bestaat. Vroeger heette dat weer het gemeen hebben van  $n+1$  "naburige punten".

We passen dit toe op de berekening van de osculerende bol van de kromme  $x^h = f^h(s)$  met  $j^h = i^h$  in het punt  $s = 0$ ,  $x^h = 0$ . Dat is de bol die in dat punt met de kromme een aanraking van de derde orde heeft. Zij

$$1.36) \quad F(x_h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum (x_i^h - p_i^h)(x_i^h - p_i^h) - R^2$$

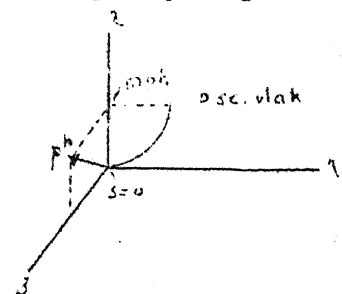
de vergelijking van deze bol met straal  $R$  en middelpunt  $p^h$ . Dan hebben we de functie  $\Phi(s) = F(f^h(s))$  te beschouwen. Deze functie en de drie afgeleiden moeten nul zijn voor  $s = 0$ . Dat geeft de vergelijkingen

$$1.37) \quad \sum p_i^h p_i^h = R^2$$

$$1.38) \quad \sum p_i^h j_i^h = 0$$

$$1.39) \quad \sum p_i^h j_i^h = \frac{1}{k}$$

$$1.40) \quad \sum p_i^h j_i^h = - \frac{1}{k_1 k_2} \left(\frac{dk}{ds}\right)_0$$



Uit deze vergelijkingen volgt

$$1.41) \quad p^h = x^h + \frac{1}{k} j_2^h - \frac{1}{k_1 k_2} \frac{dk}{ds} j_3^h$$

$$1.42) \quad R^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \left(\frac{dk}{ds}\right)^2$$

voor ieder punt van de kromme waari  $p^h$  nu het middelpunt van de osculerende bol voorstelt in het punt  $x^h$  v.d. kromme

Bovendien volgt uit (1.38) en (1.39) dat de osculatiecirkel op de osculerende bol ligt. Voor het gemak schrijven we even  $k_1 = \frac{1}{\rho_1}$  en  $k_2 = \frac{1}{\rho_2}$  en bepalen  $\frac{d}{ds} R^2$

$$1.43) \quad \frac{d}{ds} R^2 = 2 \rho_2 \frac{d\rho_2}{ds} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{d}{ds} \left( \rho_1 \frac{d\rho_1}{ds} \right) \right).$$

Is dus noch  $\frac{d\rho_1}{ds}$  noch  $\rho_2$  gelijk nul, dan is R dan en dan alleen langs de kromme constant indien

$$1.43) \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{d}{ds} \left( \rho_1 \frac{d\rho_1}{ds} \right) = 0$$

Daar bovendien

$$1.44) \quad \frac{dp^h}{ds} = j_1^h + \frac{d\rho_1}{ds} j_2^h - j_1^h + \left\{ \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{d}{ds} \left( \rho_1 \frac{d\rho_1}{ds} \right) \right\} j_3^h - \frac{d\rho_1}{ds} j_2^h$$

is in dit speciale geval

$$1.45) \quad dp^h = 0$$

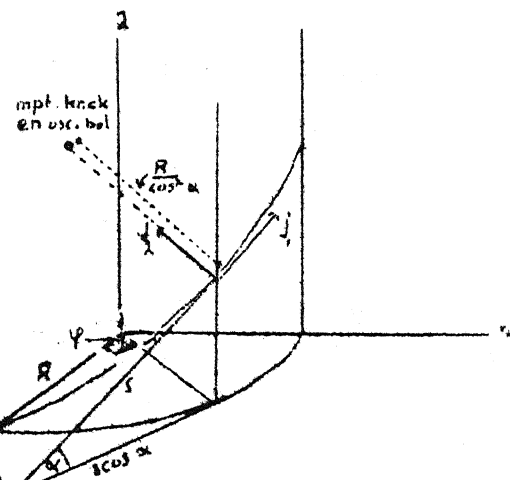
hetgeen bewijst dat ook het middelpunt van de osculerende bol constant is. De kromme is dus in dit geval een spherische kromme, dat is een kromme die geheel op een bol ligt, die dan natuurlijk tegelijk voor ieder punt osculerende bol is. Geldt (1.43) slechts in één punt dan heet dit punt een spherisch punt van de kromme.

Voorbeeld 1. De gewone schroeflijn op cylinder met straal R.

$$1.46) \quad x^h = \begin{cases} R \sin \frac{s \cos \alpha}{R} \\ s \sin \alpha \\ R \cos \frac{s \cos \alpha}{R} \end{cases}$$

$$1.47) \quad \frac{dx^h}{ds} = j^h = \begin{cases} + \cos \alpha \cos \frac{s \cos \alpha}{R} \\ \sin \alpha \\ - \cos \alpha \sin \frac{s \cos \alpha}{R} \end{cases}$$

$$1.48) \quad \frac{dj^h}{ds} = k_j^h = \begin{cases} -\frac{\cos^2 \alpha}{R} \sin \frac{s \cos \alpha}{R} \\ 0 \\ -\frac{\cos^2 \alpha}{R} \cos \frac{s \cos \alpha}{R} \end{cases}; \quad k_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{R}; \quad \rho_1 = \frac{R}{\cos^2 \alpha}$$



Daar  $k$  constant is is M.P. kromtecirkel = M.P. osculerende bol (zie 2.41))

$$1.49) \quad j_2^h = \begin{cases} - \sin \frac{s \cos \alpha}{R} \\ 0 \\ - \cos \frac{s \cos \alpha}{R} \end{cases}$$

$$1.50) \quad \frac{dj_2^h}{ds} = \begin{cases} - \frac{\cos \alpha}{R} \cos \frac{s \cos \alpha}{R} \\ 0 \\ + \frac{\cos \alpha}{R} \sin \frac{s \cos \alpha}{R} \end{cases}$$

en dus

$$1.51) \frac{dj^h}{ds} = \begin{cases} -\frac{\cos^2 \alpha}{R} \cdot \cos \alpha \cos \frac{s \cos \alpha}{R} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R} (-\sin \alpha \cos \frac{s \cos \alpha}{R}) \\ -\frac{\cos^2 \alpha}{R} \cdot \sin \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R} (\cos \alpha) \\ \frac{\cos^2 \alpha}{R} \cdot \cos \alpha \sin \frac{s \cos \alpha}{R} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R} (\sin \alpha \sin \frac{s \cos \alpha}{R}) \end{cases}$$

$-kj_1^h$   $kj_3^h$

waaruit volgt:

$$1.52) \quad k_1 = \pm \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R} \quad j_3^h = \pm \begin{cases} -\sin \alpha \cos \frac{s \cos \alpha}{R} \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \sin \frac{s \cos \alpha}{R} \end{cases}$$

Kiest men het bovenste teken dan vormen  $j_1$ ,  $j_2$  en  $j_3$  een rechts stelsel en  $k$  wordt hier positief omdat we een rechtse schroeflijn hebben.

Uit (1.48) en (1.52) volgt

$$1.53) \quad k/k = \tan \alpha = \text{tangens hellingshoek}$$

Voorbeeld 2. Stel we weten van een kromme dat  $k/k_1$  constant  $= 1/C$  is. Dan luiden de vergelijkingen van Frenet

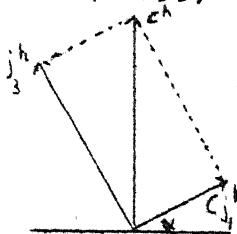
$$\frac{dj_1^h}{ds} = kj_1^h$$

$$\frac{dj_2^h}{ds} = -kj_1^h + Ckj_3^h$$

$$\frac{dj_3^h}{ds} = -Ckj_2^h$$

en daaruit volgt dat

$$1.55) \quad Cj_1^h + j_3^h = c^h$$



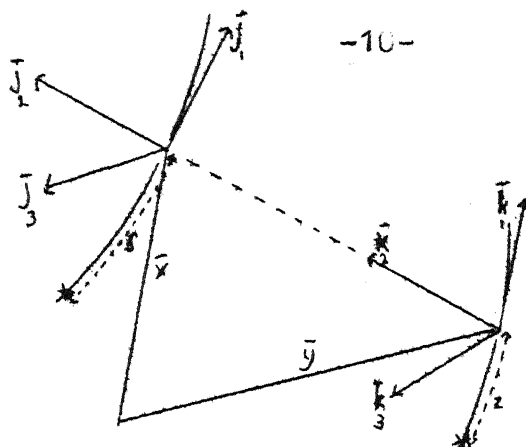
een langs de kromme constante vector is. Brengt men dus door de kromme een (algemene) cylinder met beschrijvende  $\parallel c^h$ , dan is de hellingshoek van de kromme t.o.v. een vlak  $\perp$  op  $c^h$  constant en zijn tangens gelijk aan  $C$ . De kromme is dus een algemene schroeflijn (Böschungslinie)

Voorbeeld 3. Krommenparen van Bertrand

Gegeven een kromme  $x_h = x_h(s)$  zodanig dat er een andere kromme  $y^h = y^h(z)$  bestaat, die dezelfde eerste normalen heeft als de eerste.  $z$  is de langs de tweede kromme gemeten lengte.

Er moet een betrekking bestaan van de vorm

$$1.56) \quad y^h = x^h + \ell(s) j_2^h$$



$j_1^h, j_2^h$  en  $j_3^h$  zijn de drie eenheidsvectoren behorende bij de eerste kromme.

We maken hier nu eens gebruik van een soort vectornotatie waarbij de index weggelaten wordt en de kernletter bovenstreept wordt om een vector van een gewoon getal te onderscheiden

$$1.57) \quad \bar{y} = \bar{x} + \ell \bar{j}$$

Deze vectornotatie wordt wel gebruikt zolang men alleen in  $R_3$  werkt, maar voor meer afmetingen en verdere veralgemeningen is de indexnotatie toch voordeliger. In de vectornotatie luiden de vergelijkingen van Frenet, indien men de differentiatie naar  $s$  door een accent aangeeft

$$1.58) \quad \bar{j}' = k_1 \bar{j}; \quad \bar{j}_2' = -k_1 \bar{j} + k_2 \bar{j}_3; \quad \bar{j}_3' = -k_2 \bar{j}_2$$

Schrijft men  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$  voor de 3 eenheidsvectoren behorende bij de tweede kromme dan is

$$1.59) \quad \bar{k}_1 :: \bar{y}' = \bar{j}_1 + \ell' \bar{j}_2 - k_1 \ell \bar{j}_1 + k_2 \ell \bar{j}_3$$

Maar in het algemeen is  $k_1 \neq \bar{y}'$  omdat hier naar  $s$  gedifferentieerd is en niet naar de parameter  $z$  van de tweede kromme. In elk geval moet nu  $k_1 \bar{j}_1$  zijn en daaruit volgt dat  $\ell$  een constante is, dus

$$1.60) \quad \bar{k}_1 :: \bar{j}_1 - k_1 \ell \bar{j}_1 + k_2 \ell \bar{j}_3$$

omdat  $k_1$  een eenheidsvector moet zijn is dus

$$1.61) \quad \bar{k}_1 = \bar{j}_1 \cos \alpha + \bar{j}_3 \sin \alpha; \quad \text{tg } \alpha = \frac{k_2 \ell}{1 - k_1 \ell}$$

Doordifferentiëren naar  $s$  geeft

$$1.62) \quad \bar{k}_2 :: k_1 \bar{j}_1 \cos \alpha - k_2 \bar{j}_2 \sin \alpha - \bar{j}_1 \sin \alpha \cdot \alpha' + \bar{j}_3 \cos \alpha \cdot \alpha'$$

Aangezien echter  $\bar{k}_2 :: \bar{j}_2$  moet zijn, volgt dat  $\alpha$  een constante is. Dus is

$$1.63) \quad 1 - k_1 \ell = c k_2 \ell; \quad c = \text{constante} = \cot \alpha$$

of

$$1.64) \quad \ell k_1 + c \ell k_2 = 1$$

Bestaat er omgekeerd tussen  $k_1$  en  $k_2$  een lineaire betrekking van de vorm

$$1.65) \quad a k_1 + b k_2 = 1$$



met constante coëfficiënten, dan bewijst men teruglopende dat er een tweede kromme bestaat met dezelfde normalen. Dergelijke krommenparen zijn genoemd naar Bertrand.

Behoort een kromme tot een paar van Bertrand, en zijn  $k$  en  $k_1$  niet constant, dan is de andere kromme van het paar volledig vastgelegd.  $a$  is de constante afstand van de krommen, gemeten langs de eerste normaal en  $\frac{b}{a}$  is de cotangens van de hoek tussen de raaklijnen in overeenkomstige punten. Zijn  $k$  en  $k_1$  constant, dan is de kromme een gewone schroeflijn en de tweede kromme is niet eenduidig bepaald. Iedere schroeflijn met dezelfde  $a$ s en met dezelfde normalen voldoet.

Uit (1.59, 60, 61) volgt

$$\begin{aligned} 1.66) \quad \cos \alpha &= (1 - k \ell) \frac{ds}{dz} \\ \sin \alpha &= k \ell \frac{ds}{dz} \end{aligned}$$

maar aangezien de betrekking tussen de beide krommen reciprook is moeten dezelfde betrekkingen gelden wanneer men  $s$ ,  $\alpha$  en  $\ell$  door  $z$ ,  $-\alpha$  en  $-\ell$  vervangt en  $k$  en  $k_1$  door kromming en torsie  $'k$  en  $'k_1$  van de tweede kromme

$$\begin{aligned} 1.67) \quad \cos \alpha &= (1 + 'k \ell) \frac{dz}{ds} \\ \sin \alpha &= 'k \ell \frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

Vermenigvuldiging van (1.66) en (1.67) leert dan

$$\begin{aligned} 1.68) \quad a) (1 - k \ell)(1 + 'k \ell) &= \cos^2 \alpha = \text{constant} \quad (\text{Mannheim 1877}) \\ b) \frac{k}{'k} \frac{'k}{k} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\ell^2} = \text{constant} \quad (\text{Schell 1859}) \end{aligned}$$

(168a) drukt uit dat op de gemeenschappelijke normaal de 2 punten van de krommen en de twee middelpunten van de osculatiecirkels een constante dubbelverhouding hebben.

Deze eerste§ heeft slechts gediend tot inleiding. We gaan nu krommen meer algemeen behandelen en wel met algemene "kromlijnige" coördinaten, in ruimten met een willekeurig aantal afmetingen waarin ook andere meer algemene vormen van meetkunde zullen worden toegelaten. Hiervoor moet eerst het analytische apparaat worden opgebouwd.

§ 2. De  $X_n$ . Beschouw  $n$  geordende variabelen  $\xi^k$ ;  $k = 1, \dots, n$ , die elk alle reële en complexe waarden kunnen aannemen. Eén stelsel waarden heet een arithmetisch punt en de verzameling van alle arithmetische punten de arithmetische uitgebreidheid.  $\mathcal{O}_n$ . We spreken van "het punt  $\xi$ " en noemen de  $\xi^k$  de kentallen van het punt. In  $\mathcal{O}_n$  definieren we poly-cylinders en gebieden.

Een verzameling arithmetische punten die voldoet aan de ongelijkheid

$$2.1) \quad \left| \sum_{k=1}^n \xi^k - \alpha \right| < \beta$$

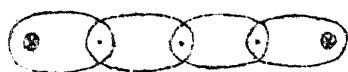
waarin de  $\alpha$  willekeurig gegeven reële of complexe getallen zijn en de  $\beta$  willekeurig gegeven positieve getallen, heet een polycylinder in  $\mathcal{U}_n$ .

Een verzameling van arithmetische punten heet een gebied van  $\mathcal{U}_n$  indien de volgende voorwaarden vervuld zijn:

1. De verzameling is open, d.w.z. ieder punt ervan behoort tenminste tot één polycylinder van  $\mathcal{U}_n$  welks punten alle tot de verzameling behoren;

2. voor iedere keuze van twee punten der verzameling bestaat er tenminste één rij van polycylinders, elk alleen bestaande uit punten der verzameling, zo dat het eerste punt in de eerste polycylinder ligt en het tweede punt in de laatste en dat opvolgende polycylinders tenminste één punt gemeen hebben

2.2)



Blijkbaar is iedere polycylinder een gebied. Ook de  $\mathcal{U}_n$  zelf is een gebied. Maarniet ieder gebied is een polycylinder.

Ieder gebied heet "nabijheid" of "omgeving" van elk van zijn punten. Voor "nabijheid van  $\xi$ " wordt geschreven  $\mathcal{U}(\xi)$ .

We beschouwen nu een verzameling  $M$ , waarvan de elementen in één-één correspondentie zijn met de punten van een gebied  $\mathcal{U}$  van  $\mathcal{U}_n$ . Over de aard der elementen van  $M$ , laten we ons niet uit. Dit kunnen bijv. zijn homogene lineaire vormen in  $n$  variabelen of polynomen van de graad  $n-1$  in één variabele of punten van een andere  $\mathcal{U}_n$ . Deze één-één correspondentie noemen we nu coördinatenstelsel in  $M$ . Correspondeert een punt  $\xi$  met een element van  $M$ , dan noemt men de  $\xi$  de coördinaten van dit element t.o.v. van het coördinatenstelsel ( $k$ ) en men schrijft  $\xi^k$  inplaats van  $\xi$  indien deze getallen werkelijk in deze zin dus als coördinaten van een element van  $M$ , worden opgevat.

We gaan nu gebruik maken van het volgende uit de analyse bekende en daar bewezen theorema:

#### Theorema van inversie

Indien in het stelsel van  $n$  vergelijkingen

$$2.3) \quad \xi^{k'} = f^{k'}(\xi^k); \quad k' = 1', \dots, n'$$

de functies  $f^{k'}$  analytisch zijn in  $\xi^k$  (en dus in een  $\mathcal{U}(\xi^k)$ ) en indien de functionaaldeterminant

$$2.4) \quad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \text{Det}(\partial_k \xi^{k'}); \quad \partial_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^k}$$

\* 0 is in  $\xi^k$  (en dus in een  $\mathcal{U}(\xi^k)$ ), dan kunnen de  $\xi^k$  uit (2.3) worden opgelost

\*) Tenzij anders wordt afgesproken nemen de indices  $k, l, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$  en soms ook  $\omega$  altijd de waarden  $1, \dots, n$  (cursief) aan.

$$2.5) \quad \xi^k = f^k(\xi^{k'}) \quad -13-$$

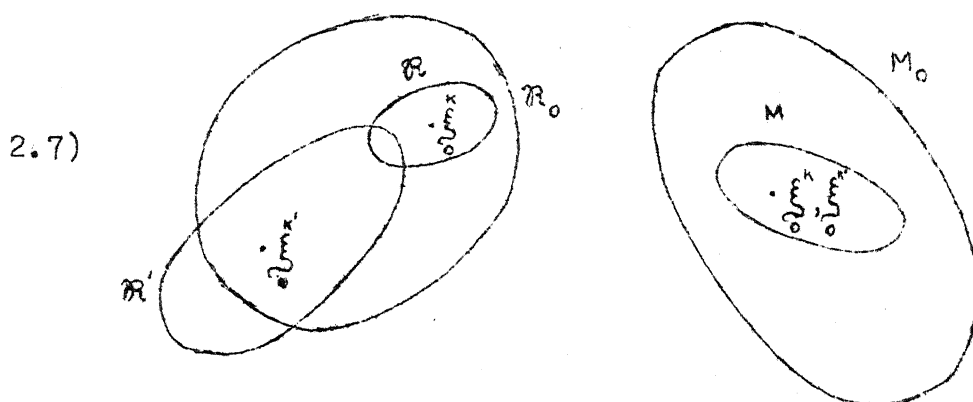
waarin de  $f^k$  analytisch zijn in  $\xi^{k'}$  (en dus in een  $\mathcal{U}(\xi^{k'})$ ), waar  $\xi^{k'}$  gedefinieerd is door

$$2.6) \quad \xi^{k'} = f^{k'}(\xi^k)$$

en deze oplossing is geldig in een  $\mathcal{U}(\xi^{k'})$ . De functionaaldeterminant der  $f^k$  is gelijk aan  $\Delta^k$ .

Uit dit theorema volgt direct dat er in  $\mathcal{U}(\xi^k)$  een omgeving  $\mathcal{R}$  van  $\xi^k$  bestaat en in  $\mathcal{U}(\xi^{k'})$  een omgeving  $\mathcal{R}'$  van  $\xi^{k'}$  voor de punten van welke omgevingen de vergelijkingen (2.3) en (2.5) een één-één correspondentie vastleggen.

We hadden boven een verzameling  $M_0$ , in één-één correspondentie met het gebied  $\mathcal{R}_0$  van  $\mathcal{U}_n$ . Laat nu  $\mathcal{R}$  geheel in  $\mathcal{R}_0$  liggen. Dan bestaat er in  $M_0$  een verzameling  $M$  in één-één correspondentie met  $\mathcal{R}$  en dus nu ook in één-één correspondentie met  $\mathcal{R}'$ . Deze laatste correspondentie is nu volgens onze definitie een ander coördinatenstelsel over  $M$ . coördinatenstelsel ( $k'$ ) en schrijven  $\xi^{k'}$  indien de  $\xi^k$  worden opgevat als coördinaten van de elementen van  $M$ .



Substitutie van  $\xi^k, \xi^{k'}$  in plaats van  $\xi^k, \xi^{k'}$  in (2.3,5) levert

$$2.8) \quad \begin{aligned} \xi^{k'} &= f^{k'}(\xi^k) \\ \xi^k &= f^k(\xi^{k'}) \end{aligned} \quad ; k' = 1', \dots, n'$$

waarin we nu ook  $f^k, f^{k'}$  schrijven in plaats van  $f^k, f^{k'}$  en deze vergelijkingen (2.8) stellen een coördinatentransformatie in  $M$  voor.

Uit fig. (2.7) zien we dat bij een coördinatentransformatie de elementen van  $M$  niet veranderen, wel hun beeldpunten in  $\mathcal{U}_n$ . Worden de elementen van  $M$  zelf getransformeerd dan moet men zo'n transformatie als volgt schrijven

$$\eta^k = F^k(\xi^k)$$

indien men het coördinatenstelsel ( $k$ ) gebruikt. Deze zelfde transformatie van elementen luidt

$$\eta^{k'} = F^{k'}(\xi^{k'})$$

met andere functies  $F^{k'}$  indien men van de coördinaten  $(k')$  gebruik maakt. We zien dus:

bij coördinatentransformaties veranderen de indices rechtsboven of onder:  $k \rightarrow k'$ ,  $1, \dots, n \rightarrow 1, \dots, n'$ , terwijl de kernletter onveranderd blijft;

bij objecttransformaties, d.z. dus hier de elementen van  $M$  of de punten van  $\mathcal{O}_n$ , verandert de kernletter, terwijl de indices rechts boven of onder onveranderd blijven. Indices boven of onder de kernletter of links van de kernletter worden tot de kernletter gerekend.

Dit is het beginsel van de kern-index methode...

Inderdaad blijkt nu dat het goed was tussen  $\xi^k$  en  $\xi^{k'}$  te onderscheiden. Een coördinatentransformatie in  $M: \xi^k \rightarrow \xi^{k'}$  (indexverandering) is in  $\mathcal{O}_n$  inderdaad een objecttransformatie (de arithmetische punten veranderen) en hier moet dus de kernletter veranderen  $\xi^k \rightarrow \xi^{k'}$ .

We gaan nu niet slechts één coördinatentransformatie in  $M$  beschouwen maar een heel stelsel. Veelal eist men dat zo'n stelsel een groep vormt d.w.z.,

1. het resultaat van twee transformaties van het stelsel na elkaar uitgevoerd behoort ook weer tot het stelsel;
2. behoort een transformatie tot het stelsel, dan bevat het stelsel ook de omkering van die transformatie;
3. het stelsel bevat de identieke transformatie.

Het komt echter ook voor dat men alleen eist dat het stelsel een pseudogroep vormt. In plaats van 1. komt dan

- 1a. Indien twee transformaties van het stelsel na elkaar uitgevoerd kunnen worden dan behoort het resultaat ook weer tot het stelsel.

Voorbeelden van groepen zijn:

1. de groep van alle permutaties der coördinaten.  
Een transformatie van deze groep is bijv.  $\xi^1 = \xi^2; \xi^2 = \xi^1$ ;
2. de affine groep  $G_a$  van alle omkeerbare lineaire transformaties;
3. de speciaal affine groep  $G_{ho}$  van alle omkeerbare homogene lineaire transformaties;
4. de orthogonale groep  $G_{or}$  van alle orthogonale transformaties ( $\Delta = \pm 1$ );
5. de groep  $G_{ro}$  van alle rotaties.

Voorbeeld van een pseudogroep is de groep  $\mathcal{P}_n$  van alle omkeerbare transformaties die in enig gebied gedefinieerd en analytisch zijn. Indien een transformatie  $T_1$  het gebied  $\mathcal{R}_1$  transformeert in  $\mathcal{R}_2$  en een andere transformatie  $T_2$  het gebied  $\mathcal{R}_2$  in  $\mathcal{R}_3$ , dan kan  $T_2 T_1$  alleen worden gevormd als  $\mathcal{R}_2$  en  $\mathcal{R}_3$  een punt (en dus een gebied) gemeen hebben.

De verzameling  $M$ , uitgerust met één oorspronkelijk gegeven coördinatenstelsel en met alle coördinatenstelsels die hieruit kunnen voortkomen door toepassing van de transformaties van een bepaalde gegeven groep of pseudogroep heet een n-dimensionale meetkundige uitgebreidheid (in tegenstelling tot de arithmetische uitgebreidheid  $\mathcal{O}_n$ ). De transformaties van de groep of pseudogroep heten toegelaten of geoorloofde coördinatentransformaties, de ontstane coördinatenstelsels toegelaten of geoorloofde coördinatenstelsels, de elementen van  $M$  geometrische punten of kortweg punten.

Het is gebruikelijk de verschillende geometrische uitgebreidheden met speciale letters aan te duiden. Wij gebruiken hier de volgende letters:

$X_n$ :  $\mathcal{R}_0$  willekeurig met pseudogroep  $\mathcal{P}_n$ . Dikwijls wordt in plaats van analyticiteit alleen maar continuïteit en een voldoende aantal malen differentieerbaarheid verlangd. De  $X_n$  is de ruimte van de gewone gegeneraliseerde differentiaalmeetkunde.

$E_n$ :  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{O}_n$  met  $\mathcal{G}_a$ . De  $E_n$  is de ruimte der gewone affine meetkunde.

gecentreerde  $E_n$ :  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{O}_n$  met  $\mathcal{G}_{h_0}$ . In de  $E_n$  ligt een oorsprong vast.

$R_n$ :  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{O}_n$  met  $\mathcal{G}_{cr}$ . De  $R_n$  is de ruimte der meest eenvoudige n-dimensionale metrische meetkunde. De gewone ruimte van klassieke mechanica en physica is een  $R_3$ .

In een  $X_n$  bestaan natuurlijk geen polycylinders want er is geen bevoorrecht coördinatenstelsel (in tegenstelling tot de  $\mathcal{O}_n$ ). In de plaats daarvan treedt het begrip cel. Een cel wordt gedefinieerd als de verzameling van punten die ten opzichte van enig geoorloofd coördinatenstelsel aan de ongelijkheden

$$|\xi^k| < 1$$

voldoen. Met behulp van deze cellen kan men nu ook in  $X_n$  een gebied definiëren. Men kan echter ook een gebied definiëren als de verzameling van alle punten die met behulp van een geoorloofd coördinatenstelsel in één-één correspondentie kunnen worden gebracht met de arithmetische punten van een gebied der  $\mathcal{O}_n$ .

Iedere  $X_n$ , die een gebied is van een andere  $X_n$ , heet in die laatste  $X_n$  ingebied. Elk gebied van een  $X_n$  heet "nabijheid" of "omgeving" van elk van zijn punten. De omgeving van  $\xi^k$  wordt genoteerd  $\mathcal{N}(\xi^k)$ .

Heeft men voor  $\mathcal{P}_n$  analyticiteit geëist, dan heeft het zin een functie  $p$  van de punten der  $X_n$ , die voor enig gebied is gedefinieerd, analytisch te noemen bijv. in  $\xi^k$  indien ten opzichte van enig geoorloofd coördinatenstelsel  $(\kappa)$  de functie

$$2.11) \quad p = f(\xi^k)$$

in  $\xi^k$  analytisch is. Op grond van een bekende stelling uit de functietheorie is dan ook voor een geoorloofde coördinatentransformatie  $(\kappa) \rightarrow (\kappa')$  de functie  $f'$  optredende in

$$2.12) \quad p = f'(\xi^{k'}) = f(f^k(\xi^{k'}))$$

analytisch in  $\xi^{k'}$ . Analyticiteit is dus nu een eigenschap die invariant is bij alle geoorloofde coördinatentransformaties. Is  $p$  analytisch in  $\xi^k$  dan volgt daaruit analyticiteit in alle punten van een  $\mathcal{M}(\xi^k)$ .

Heeft men voor  $\mathcal{P}_n$  alleen geëist dat de functies  $f^{k'}$  continu en  $t$  maal differentieerbaar zijn en is  $p$  een functie van  $\xi^k$  die eveneens continu is en  $t$  maal differentieerbaar, dan is deze eigenschap blijkens (2.12) ook weer invariant bij geoorloofde coördinatentransformaties.

In een  $X_n$  kan men nu figuren geven, vastgelegd door getallen t.o.v. een geoorloofd coördinatenstelsel. Vervolgens kan men zodanige eigenschappen van die figuren beschouwen die invariant zijn bij geoorloofde coördinatentransformaties. De verzameling van al deze eigenschappen vormt de meetkunde der  $X_n$ . Het heeft bijvoorbeeld zin te vragen of twee krommen elkaar snijden, maar de vraag of een kromme "recht" is, is in een  $X_n$  zinloos. De meetkunde wordt dus de invariantentheorie bij een bepaalde groep of pseudogroep, hier  $\mathcal{P}_n$ . (Beginsel van F. Klein, 1872).

Kiest men in  $X_n$  één coördinatenstelsel en bepaalt men zich verder alleen tot coördinatentransformaties van de groep  $G_a$  dan ontstaat een  $\mathcal{E}_n$ . De meetkunde der  $\mathcal{E}_n$  is de invariantentheorie bij de groep  $G_a$ . Maar men kan ook zeggen dat de meetkunde van een figuur in  $\mathcal{E}_n$  hetzelfde is als de meetkunde van deze figuur + de verzameling van alle nu nog geoorloofde coördinatenstelsels in  $X_n$ . Men kan dus tot een minder algemene meetkunde afdalen door of de groep te verkleinen of de groep zo te laten en een stelsel van figuren (hier de alsnog geoorloofde coördinatenstelsels) toe te voegen. Ook dit beginsel werd door F. Klein 1872 geformuleerd. Dikwijls kan men in plaats van de verzameling <sup>alsnog</sup> aller geoorloofde coördinatentransformaties een andere eenvoudiger figuur invoeren. Neem bijv. de gecentreerde  $\mathcal{E}_2$ . Om tot de gecentreerde  $\mathcal{R}_2$

te komen moet men van één coördinatenstelsel uitgaan en nu alleen nog maar orthogonale transformaties toelaten. Maar men kan het ook anders doen en alleen een ellips invoeren met de vergelijking

$$2.13) \quad g_{11} x'x' + 2g_{12} x'x'' + g_{22} x''x'' = 1$$

Is  $(K')$  een coördinatenstelsel t.o. waarvan de vergelijkingen van de ellips de vorm

$$2.14) \quad x'x' + x''x'' = 1$$

aannemen dan kunnen alle coördinatenstelsels met deze eigenschap uit  $(K')$  worden verkregen door de transformaties van de groep  $G_{or}$  toe te passen. Uit de  $E_2$  met groep  $G_a$  is dus nu een  $R_2$  met groep  $G_{or}$  ontstaan. In die  $R_2$  heet de ellips "cirkel". Anders gezegd:

eigenschap figuur in  $R_2$  = eigenschap van die figuur + de ellips  
(2.13) in  $E_2$ .

### §3. Geometrische grootheden en objecten in $E_n$ en in $X_n$ .

Bij een geoorloofde coördinatentransformatie in  $X_n$  transformeren zich de differentiaalën lineair homogeen

$$3.1) \quad d\xi^{k'} = A_{k'}^{k'} d\xi^k; \quad A_{k'}^{k'} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{k'} \xi^{k'}$$

Deze transformaties vormen in één bepaald punt  $\xi^k$  de groep  $G_{ho}$ . Daaruit volgt echter dat aan ieder punt van  $X_n$  een gecentreerde  $E_n$  is toegevoegd, de lokale  $E_n$  van  $\xi^k$ . Verder dat bij ieder coördinatenstelsel in  $X_n$  één bepaald rechtlijnig (doch niet orthogonaal) coördinatenstelsel in  $E_n$  behoort. Men is gewend de oorsprong van  $E_n$  met het punt  $\xi^k$  te identificeren. Verder hebben echter  $X_n$  en  $E_n$  geen enkel punt gemeen. Ook hebben twee lokale  $E_n$ 's die tot verschillende punten behoren helemaal niets gemeen. Hier is vroeger nogal geknoeid, men beschouwde de  $E_n$  als een "oneindig klein" gebiedje van de  $X_n$  maar dit heeft natuurlijk alleen heuristische waarde en kan tot allerlei foute conclusies leiden. Ook heeft men zich de  $X_n$  ingebed gedacht in een  $E_N$  en de lokale  $E_n$  als de raak- $E_n$  aan de  $X_n$  in  $E_N$  geduid. Afgezien daarvan dat men zich met die inbedding aanzienlijke beperkingen oplegt, treden er nog andere moeilijkheden op. Het heeft bijv. wel zin om te vragen of twee "naburige" raak- $E_n$ 's elkaar snijden (dit kan van de aard der inbedding afhangen) maar het heeft geen zin deze vraag te stellen voor "naburige" lokale  $E_n$ 's.

Bij de groep  $G_{ho}$  in één bepaalde lokale  $E_n$  definieren we nu de volgende meetkundige grootheden:

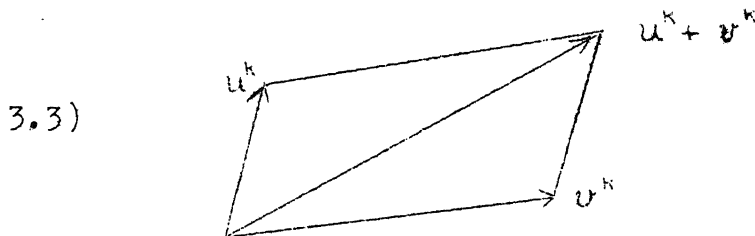
1. Scalar  $p$ . Eén kental, invariant bij (3.1)

2. Contravariante vector  $v^k$ . kentallen met transformatie

$$3.2) \quad v^{k'} = A^{k'}_k v^k$$

Geometrisch beeld: vrijzwevend stelsel van 2 punten met (niet noodzakelijk rechte) pijl of ook in een gecentreerde  $\mathcal{E}_n$  het punt met coördinaten  $v^k$ . De oorsprong fungeert dan als eerste punt. De projectie op de 1-as, gemeten met de bij die as behorende maat is  $v^1$ .

Blijkens (3.1) is  $d\xi^k$  een contravariante vector. Optelling van contravariante vectoren geschiedt volgens het "parallelogram van krachten"

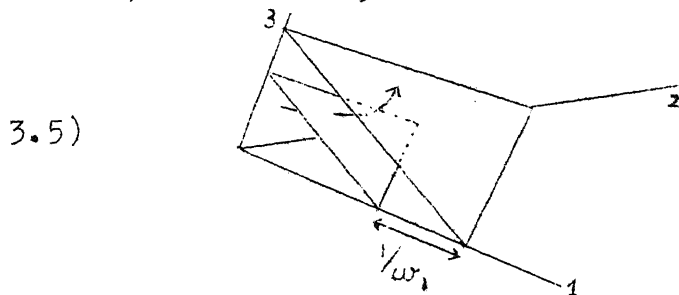


3. Covariante vector  $w_\lambda$ . n kentallen met transformatie

$$3.4) \quad w_{\lambda'} = A^\lambda_{\lambda'} w_\lambda$$

Geometrisch beeld: vrij zwevend stelsel van 2 evenwijdige hyper-vlakken (d.z. (n-1)-dimensionale vlakke uitgebreidheden of

$\mathcal{E}_{n-1}$ 's in  $\mathcal{E}_n$ ) met een doorstekende liefst niet rechte pijl (anders wordt er gesuggereerd dat er ook nog een richting gegeven is). Voor  $n = 3$  is het beeld dus



Het stuk afgesneden op de 1-as gemeten met de bij die as behorende maat is  $1/w_1$ . In een gecentreerde  $\mathcal{E}_n$  kan men ook het hyper-vlak met de vergelijking

$$3.6) \quad x^k w_k = 1$$

( $x^k$  = coördinaten in  $\mathcal{E}_n$ ) nemen. Het evenwijdige vlak door de oorsprong fungeert dan als eerste vlak. Wordt een covariante vector met 2 vermenigvuldigd dan komen de hypervlakken 2 x zo dicht bij elkaar te liggen. Om de optelling in beeld te brengen



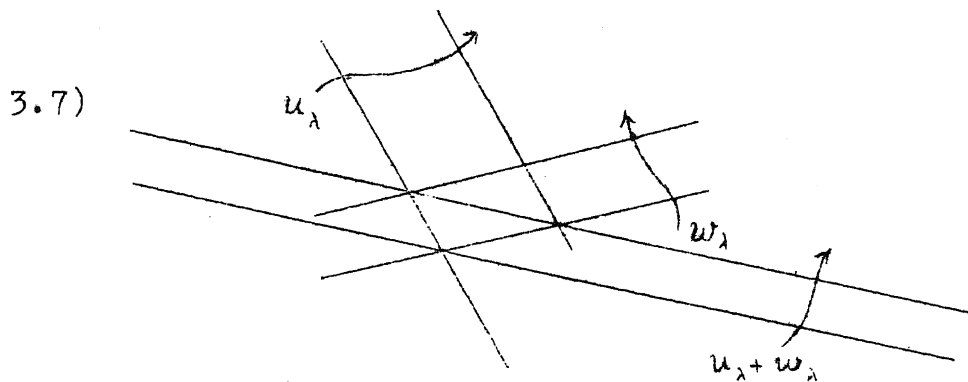
/ Het meetkundig beeld van een gemengde affinor van de valentie twee,  $P^{\kappa}_{\lambda}$ , in een gecentreerde  $\mathcal{E}_n$  is een homogeen lineaire punttransformatie

3.10)

$$y^{\kappa} = P^{\kappa}_{\lambda} x^{\lambda}$$

Dit is een objecttransformatie, geen coördinatentransformatie.

snijden we beide hypervlakken met een vlak. Dan ontstaat de figuur



De verbinding

$$3.8) \quad v^k w_k$$

heet de overschuiving (Überschiebung, transvection) van  $v^k$  en  $w_\lambda$ . Deze verbinding is een scalar en een simultaaninvariant van  $v^k$  en  $w_\lambda$ . De absolute waarde van  $v^k w_k$  is de lengte voor  $v^k$ , gemeten met het stuk dat door de hypervlakken van  $w_\lambda$  op de lijn van  $v^k$  wordt afgesneden.  $v^k w_k$  is positief wanneer de twee zinnen van  $v^k$  en  $w_\lambda$  overeenstemmen en negatief in het andere geval. Is dus  $v^k w_k = \pm 1$  dan past  $v^k$  precies tussen de twee  $\mathcal{E}_{n-1}$ 's van  $w_\lambda$ .

4. Affinoren  $P^{k_1 \dots k_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$  met de transformatie

$$3.9) \quad P^{k'_1 \dots k'_p}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_q} = A^{k'_1}_{k_1} \dots A^{k'_p}_{k_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \dots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q} P^{k_1 \dots k_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$$

• of kort =  $A^{k'_1 \dots k'_p}_{k_1 \dots k_p} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_q} P^{k_1 \dots k_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$

heet een affinor van de valentie  $p+q$ , de contravariante valentie  $p$  en de covariante valentie  $q$ . Een contra (co) variante affinor heeft alleen indices boven (beneden). Zijn beide soorten indices aanwezig dan heet de affinor gemengd. De scalar, de contravariante vector en de covariante vector zijn bijzondere gevallen van affinoren.

Affinoren met dezelfde valenties kunnen worden opgeteld, andere affinoren niet. /

Geeft men aan alle indices van  $P^{k_1 \dots k_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$  behalve één, bijv.

$k_1$ , achtereenvolgens alle waarden van 1 tot  $n$  dan ontstaan  $n^{p+q-1}$  vectoren. Zijn er onder deze juist  $r$  lineair onafhankelijke dan spannen deze in  $\mathcal{E}_n$  een  $\mathcal{E}_r$  door  $O$  op.  $r$  heet de  $k_1$  - rang van  $P^{k_1 \dots k_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ , de verzameling van alle van deze  $r$

lineaire afhankelijke vectoren heet het  $k$ , -gebied van  $P^{k_1 \dots k_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  en  $\xi_r$  heet de drager van dit gebied. Is de index covariant, bijv.  $\lambda$ , dan geldt hetzelfde, alleen wordt er een  $\xi_{n-r}$  opgespannen en deze heet de drager van het door de  $r$  covariante vectoren vastgelegde  $\lambda$ , -gebied.

Bij een affinor van de valentie twee, hetzij contra, hetzij covariant, hetzij gemengd, is de rang t.o.v. beide indices even groot. De twee gebieden en de twee dragers behoeven echter niet dezelfde te zijn. De rang is hier identiek met de rang van de matrix der kentallen bijv.

$$3.11) \quad \begin{vmatrix} P^1_1 & P^1_2 & \dots & P^1_n \\ P^2_1 & & & \\ \vdots & & & \\ P^n_1 & \dots & \dots & P^n_n \end{vmatrix}$$

Deze rang wordt als volgt gedefinieerd. Bevat de matrix onderdeterminanten met  $R$  rijen en  $R$  kolommen, die niet nul zijn, maar geen zodanige met  $R+1$  rijen en  $R+1$  kolommen, dan is de rang  $R$ . Al deze rangen zijn arithmetische invarianten bij coördinatentransformaties.

De vergelijking (3.10) laat dan en alleen dan een omkering toe indien de rang van  $P^k_{\lambda}$  gelijk  $n$  is

$$x^k = \bar{P}^k_{\lambda} y^{\lambda}$$

$\bar{P}^k_{\lambda}$  heet de omkering van  $P^k_{\lambda}$ . Op dezelfde wijze hebben affinoren als  $Q^{k\lambda}$  en  $R_{\lambda k}$  omkeringen  $\bar{Q}^{\lambda k}$ ,  $\bar{R}^{k\lambda}$  mits hun rang  $n$  is.

Een co- of contravariante affinor heet symmetrisch in alle indices of ook tensor <sup>1)</sup> indien die grootheid invariant is bij iedere verwisseling van twee indices, bijv.

$$3.13) \quad P_{k\lambda} = P_{\lambda k}$$

Uit iedere co- of contravariante affinor kan een tensor worden afgeleid door het invariante proces van het mengen over alle indices. Dit mengen geschiedt door de som te nemen van alle isomeren (affinoren verkregen door permutatie der indices) en de som van deze

<sup>1)</sup> De naam tensor wordt door verschillende auteurs ook voor affinoren gebruikt, de tensor heet dan symmetrische tensor.

te delen door  $p!$  indien  $p$  de valentie is, bijv.

$$3.14) \quad P_{(\kappa\lambda\mu)} = \frac{1}{6}(P_{\kappa\lambda\mu} + P_{\lambda\mu\kappa} + P_{\mu\kappa\lambda} + P_{\lambda\kappa\mu} + P_{\mu\lambda\kappa} + P_{\kappa\mu\lambda})$$

Het mengen wordt aangeduid door kromme haken om de te mengen indices. Men kan ook mengen over enkele indices, waarbij niet mee te mengen indices door verticale strepen worden uitgeschakeld, bijv.

$$3.15) \quad P_{\kappa(\lambda|\mu|\nu)} = \frac{1}{2}(P_{\kappa\lambda\mu\nu} + P_{\kappa\nu\mu\lambda})$$

Ook dit proces is invariant, het resultaat is een in enkele indices symmetrische affinor. Een affinor van de valentie  $p$  heeft  $n^p$  onafhankelijke kentallen, een tensor van de valentie  $p$  slechts  $\binom{n+p-1}{p}$ .

Een co- of contravariante affinor van de valentie  $p$  heet alternerend in alle indices of ook  $p$  -vector <sup>1)</sup> (multivector indien men  $p$  niet wenst te noemen) indien die grootheid invariant is op het teken na bij iedere verwisseling van twee indices, bijv. de bivector

$$3.17) \quad F_{\kappa\lambda} = -F_{\lambda\kappa}$$

Uit iedere co- of contravariante affinor met een valentie  $p \leq n$  kan een  $p$  -vector worden afgeleid door het invariante proces van het alterneren over alle indices. Dit alterneren geschiedt door de som te nemen van alle isomeren die door een even permutatie ontstaan, daarvan af te trekken de som van alle isomeren verkregen door oneven permutaties en het resultaat te delen door  $p!$  indien  $p$  de valentie is, bijv.

$$3.18) \quad P_{[\kappa\lambda\mu]} = \frac{1}{2}(P_{\kappa\lambda\mu} + P_{\lambda\mu\kappa} + P_{\mu\kappa\lambda} - P_{\lambda\kappa\mu} - P_{\mu\lambda\kappa} - P_{\kappa\mu\lambda})$$

Alterneren over meer dan  $n$  indices geeft altijd nul. Er bestaan dus geen  $p$  -vectoren met  $p > n$ . Het alterneren wordt aangeduid door rechte haken om de te alterneren indices. Men kan ook alterneren over enkele indices, waarbij niet mee te alterneren indices door  $||$  worden uitgeschakeld. Bij een veel voorkomende vorm van dubbele alternatie doet men het gemakshalve anders. Zij  $P_{\kappa\lambda}$  een affinor van de rang  $r$ . Dan verstaat men onder

$$3.19) \quad P_{[\kappa_1|\lambda_1 \dots \kappa_p|\lambda_p]}$$

de grootheid, die verkregen wordt door onafhankelijk van elkaar over de  $\kappa$  -indices en over de  $\lambda$  -indices te alterneren. Men overtuige zich voor lage waarden van  $p$  en  $n$  dat één der alternaties mag vervallen

$$3.20) \quad P_{[\kappa_1|\lambda_1 \dots \kappa_p|\lambda_p]} = P_{[\kappa_1|\lambda_1] \dots [\kappa_p|\lambda_p]} = P_{\kappa_1|\lambda_1 \dots \kappa_p|\lambda_p}$$

<sup>1)</sup> Verschillende auteurs gebruiken de naam antisymmetrische tensor.

Ook overtuige men zich voor lage waarden van  $p$  en  $n$  dat de kentallen van  $p! P_{[\kappa|\lambda], \dots, P_{[\kappa|\lambda]|\lambda|p}}$  precies de onderdeterminanten met  $p$  rijen en  $p$  kolommen zijn uit de matrix van  $P_{\kappa\lambda}$ . De determinant van deze matrix is dus

$$3.21) \quad \text{Det} (P_{\kappa\lambda})_{\kappa\lambda} = n! P_{[1|1] \dots [n|n]} = n! P_{[1|1] \dots [n|n]} = n! P_{[1|1] \dots [n|n]}$$

Zijn  $x^k$  geoorloofde coördinaten in de lokale  $\mathcal{E}_\eta$ , dan is het geometrische beeld van een tensor  $P_{\lambda\kappa}$  het quadratische hyperoppervlak met de vergelijking

$$3.22) \quad P_{\lambda\kappa} x^\lambda x^\kappa = 1$$

Is  $P_{\lambda\kappa}$  reëel en van de rang  $r$  dan is uit de algebra bekend dat er altijd tenminste één toegelaten coördinatenstelsel ( $\kappa'$ ) bestaat zo dat in de matrix der  $P_{\lambda'\kappa'}$  alle getallen buiten de diagonaal nul zijn en dat

$$3.23) \quad P_{1'1'} = -1; \dots; P_{s's'} = -1; P_{(s+1)'(s+1)'} = +1; \dots; P_{r'r'} = +1 \\ P_{(r+1)'(r+1)'} = 0; \dots; P_{n'n'} = 0.$$

$s$  heet de index van  $P_{\lambda\kappa}$  en de volg  $- \dots - + + \dots +$  de signatuur. Is  $s = 0$  of  $s = n$  dan heet  $P_{\lambda\kappa}$  positief resp. negatief definitief en in het andere geval indefinitief. De signatuur heet even (oneven) als  $s$  even (oneven) is. Index en signatuur zijn invariant voor reële geoorloofde coördinatentransformaties.

Op de geometrische beelden van  $p$ -vectoren komen we later terug.

Behalve gewone kentallen gebruikt men bij grootheden ook dikwijls kentallen die behoren bij twee of meer verschillende coördinatenstelsels. Deze dragen indices van verschillende soorten en worden intermediair genoemd, bijv.

$$3.24) \quad P^{\kappa'\lambda}_{\dots\mu} = A^{\kappa'}_{\kappa} P^{\kappa\lambda}_{\dots\mu} = A^{\lambda}_{\lambda'} P^{\kappa'\lambda'}_{\dots\mu'}$$

De  $A^{\kappa'}_{\lambda}$  en  $A^{\lambda}_{\lambda'}$  optredende in (3.3) en (3.4) zijn bijvoorbeeld intermediaire kentallen van de eenheidsaffinor  $A^{\kappa}_{\lambda}$  gedefinieerd door

$$3.25) \quad A^{\kappa}_{\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{voor } \kappa = \lambda \\ 0 & \text{voor } \kappa \neq \lambda \end{cases}$$

wiens geometrisch beeld (verg. (3.10)) de identieke transformatie is:

$$3.26) \quad x^{\kappa} = A^{\kappa}_{\lambda} x^{\lambda}$$

Het komt ook voor dat een grootheid gedefinieerd is t.o.v. twee of meer verschillende ruimten. Ook dan kan de grootheid verschillende

soorten van indices dragen, die tot die verschillende ruimten behoren. Dergelijke grootheden heten verbindingsgrootheden.

In een  $\mathcal{E}_n$  met rechtlijnige coördinaten  $x^k$  zijn bijvoorbeeld

$$3.27) \quad x^k = B_{\ell}^k y^{\ell}; \ell = 1, \dots, m.$$

bij constante  $B_{\ell}^k$  de parametervergelijkingen van een  $\mathcal{E}_m$  waarin de  $y^{\ell}$  als rechtlijnige coördinaten kunnen worden gebruikt.  $B_{\ell}^k$  is nu een verbindingsgrootte tussen de  $\mathcal{E}_n$  en de  $\mathcal{E}_m$  en zijn transformatie luidt

$$3.28) \quad B_{\ell'}^{k'} = A_{\ell}^{k'} B_{\ell}^{\ell} B_{\ell}^k; B_{\ell}^{\ell} = \frac{\partial y^{\ell}}{\partial y^{\ell'}}.$$

5. Dichtheden en  $W$ -grootheden. Behalve scalair zijn er nog andere grootheden met een kental dat echter niet meer invariant is. Aangezien er geen index is moeten de kentallen ten opzichte van verschillende coördinatenstelsels op andere wijze van elkaar onderscheiden worden. Voor een grootte  $\phi$  schrijven we voor het kental t.o.v.  $(K)$ :  $\phi^{(K)}$  of  $\phi[K]$  en voor het kental t.o.v.  $(K')$ :  $\phi^{(K')}$  of  $\phi[K']$ . Waar niet bepaald nodig laat men  $(K)$  en  $[K]$  weg. We onderscheiden:

scalaire  $\Delta$ -dichtheid met gewicht  $k$ :  $\tilde{\phi}[K'] = \Delta^{-k} \tilde{\phi}[K]$

scalaire (gewone)dichtheid met gewicht  $k$ :  $\phi[K'] = |\Delta|^{-k} \phi[K]$

$W$ -scalar

$$\tilde{\phi}[K'] = \Delta / |\Delta| \phi[K]$$

Door vermenigvuldiging van deze grootheden met een affinor ontstaan de grootheden

affinor  $\Delta$ -dichtheid

affinordichtheid

$W$ -affinor.

(Evenzo tensordichtheid, bivectordichtheid,  $W$ -trivector, enz.).

Gewone dichtheden en  $W$ -grootheden treden veel in de physica op,  $\Delta$ -dichtheden meer in de differentiaalmeetkunde. Bij voorkeur gebruiken we de volgende kernletters:

|                              |           |            |            |
|------------------------------|-----------|------------|------------|
| affinoren                    | latijnse  | kernletter |            |
| $W$ -affinoren               | "         | "          | met $\sim$ |
| gewone affinordichtheden     | gothische | "          |            |
| affinor $\Delta$ -dichtheden | "         | "          | met $\sim$ |

Maar vooral in de physica zijn er dikwijls andere overwegingen die de keuze van een kernletter bepalen.

Er zijn twee  $n$ -vector  $\Delta$ -dichtheden  $f^{k_1 \dots k_n}$  en  $n$   $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die een bijzondere rol spelen. Zij worden gedefinieerd door de vergelij-

kingen

$$3.29) \quad \tilde{f}^{1 \dots n} = +1; \quad \tilde{w}_{1 \dots n} = +1$$

t.o.v. ieder toegelaten coördinatenstelsel in  $\mathcal{E}_n$ . Uit deze algemene geldigheid volgt dat  $\tilde{f}$  het gewicht +1 en  $\tilde{w}$  het gewicht -1 heeft. Deze grootheden zijn dus evenals de eenheidsaffinor a priori in  $\mathcal{E}_n$  aanwezig. Met behulp van hen kan men eeneenduidige correspondentie vastleggen tussen contra-(co-)variante  $p$ -vectoren en co-(contra) variante  $(n-p)$ -vector  $\Delta$ -dichtheden van het gewicht -1 (+1).

$$3.30) \quad \begin{aligned} a) \quad \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_q} &= \frac{1}{p!} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_q k_1 \dots k_p} v^{k_1 \dots k_p} \\ b) \quad v^{k_1 \dots k_p} &= \frac{1}{q!} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_q} \tilde{f}^{\lambda_1 \dots \lambda_q k_1 \dots k_p} \\ c) \quad \tilde{w}^{k_1 \dots k_q} &= \frac{1}{p!} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \tilde{f}^{\lambda_1 \dots \lambda_p k_1 \dots k_q} \\ d) \quad w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \frac{1}{q!} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p k_1 \dots k_q} \tilde{w}^{k_1 \dots k_q}; \quad q = n - p \end{aligned}$$

In andere vorm luidt deze correspondentie

$$3.31) \quad \begin{aligned} a) \quad \tilde{w}_{\mu_1 \dots \mu_q} &= v^{\mu_{q+1} \dots \mu_n} \\ b) \quad \tilde{w}^{\mu_1 \dots \mu_q} &= w_{\mu_{q+1} \dots \mu_n} \end{aligned}$$

$\mu_1, \dots, \mu_n$  evenpermutatie der getallen  $1, \dots, n$ .

Dit zijn voorbeelden van kentallen van een grootheid, die bij andere groepering als kentallen van een andere grootheid kunnen worden opgevat. Op deze vrije corresponderende grootheden hebben natuurlijk dezelfde meetkundige interpretatie  $\tilde{f}$  en  $\tilde{w}$  corresponderen met het getal +1.

Van twee meetkundige grootheden kan men een product vormen, bijv.

$$3.32) \quad R^{k \dots \nu \mu}_{\lambda} = P^{k \dots \lambda} Q^{\mu \dots \nu}_{\rho}$$

Wordt in zulk een product gesommeerd over een of meer paren van ongelijkstandige indices, waarvan er telkens één tot de ene en één tot de andere factor behoort dan ontstaat een overschuiving (Überschiebung, transvection), bijv.

$$3.33) \quad S^{\nu} = P^{k \dots \lambda} Q^{\lambda \dots \nu}_{\dots k}$$

Wordt de sommatie toegepast op één enkele grootheid dan spreekt men van vouwing (plooing, Faltung, bij physici ook Verjüngung, contraction) bijv.

3.34

$$T^\mu = Q^{\mu\nu} \dots$$

Productvorming, overschuiving en vouwing zijn invariante operaties.

Meetkundige objecten in  $X_n$  worden gedefinieerd t.o.v. de pseudogroep  $\mathcal{Q}_n$ . Laat men in  $\mathcal{Q}_n$  alleen analytische functies  $f^k$  toe dan definieert men als volgt:

Een geometrisch object in een bepaald punt  $\xi^k$  der  $X_n$  is een correspondentie tussen de toegelaten coördinatenstelsels in  $X_n$  enerzijds en de geordende stellen van  $N$  getallen anderzijds, die aan de volgende voorwaarden voldoet.

- Aan ieder toegelaten coördinatenstelsel in  $X_n$  is één en slechts één geordend stel van  $N$  getallen toegevoegd;
- indien  $\Phi_\Lambda$ ;  $\Lambda = 1, \dots, N$  en  $\Phi_{\Lambda'}$ ;  $\Lambda' = 1', \dots, N'$  corresponderen met  $(K)$  en  $(K')$ , dan hangen de  $\Phi_{\Lambda'}$  alleen af van de  $\Phi_\Lambda$  en van de functies  $\xi^k(\xi^k)$  in de omgeving van  $\xi^k$ .

Beperkt men zich tot continuïteit en een voldoende aantal malen differentieerbaarheid, dan komt in plaats van  $(\mathcal{Q})$  de eis dat de  $\Phi_{\Lambda'}$  alleen van de  $\Phi_\Lambda$  en van de veldwaarden van  $\xi^{k'}$ ,  $A_k^{k'}$  en de afgeleiden van  $A_k^{k'}$  tot een zekere orde in  $\xi^k$  afhangen.

De  $\Phi_\Lambda$  heten de kentallen van het object met betrekking tot  $(K)$ . Geometrische objecten in  $X_n$  worden onderscheiden naar de transformatiewijze hunner kentallen.

Zijn de  $\Phi_\Lambda$  lineair homogeen in de  $\Phi_\Lambda$ , homogeen algebraïsch in de veldwaarden van  $A_k^{k'}$  in  $\xi^k$  en onafhankelijk van de veldwaarden van  $\xi^{k'}$ ,  $\partial_\mu A_k^{k'}$ ,  $\partial_\nu \partial_\mu A_k^{k'}$  enz. in  $\xi^k$  dan heet het object een geometrische grootheid. Geometrische grootheden, zijn dus speciale gevallen van geometrische objecten.

Tot nu hebben we alleen grootheden en objecten beschouwd in één punt van de  $X_n$ . Men kan nu ook bijv. een vector geven in ieder punt van het beschouwde gebied der  $X_n$ . Dan ontstaat een veld, bijv. scalarveld, vectorveld, affinorveld of algemeen objectveld. We nemen altijd aan dat de kentallen continue en een voldoende aantal malen differentieerbare functies der coördinaten zijn, veelal ook dat het analytische functies zijn. Nu ontstaat er direct een moeilijkheid. De differentiaal van een scalar  $p$  is blijkbaar ook een scalar en ingevalge

3.29)

$$\partial_{\mu'} p = A_{\mu'}^\mu \partial_\mu p$$

is de afgeleide van  $p$  een covariante vector (de gradient van  $p$ ). Maar



ingevolge

$$3.30) \quad dv^{k'} = d(A_{k'}^{k'} v^k) = A_{k'}^{k'} dv^k + v^k dA_{k'}^{k'}$$

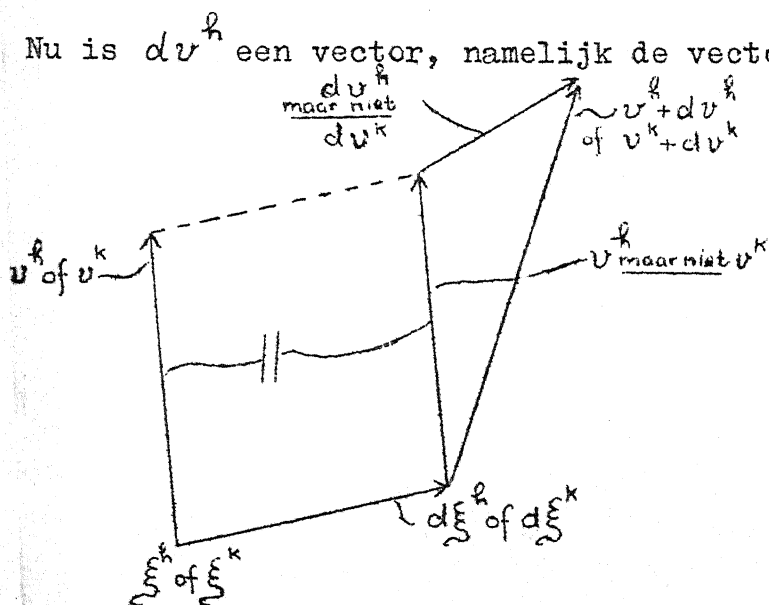
is de differentiaal van  $v^k$  geen vector. Evenzeer is de afgeleide  $\partial_\mu v^k$  geen affinor. Alleen in het zeer speciale geval dat de  $A_{k'}^{k'}$  steeds constanten zijn vervalt deze moeilijkheid. Maar  $A_{k'}^{k'} = \text{constant}$  wil zeggen dat wij ons vastgelegd hebben op lineaire coördinatentransformaties d.w.z. we werken niet meer in een  $X_n$  maar in een  $E_n$ . In die  $E_n$  kan men dan natuurlijk alle locale  $E_n$ 's met de  $E_n$  zelf identificeren. In de  $E_n$  geldt algemeen, dat ten opzichte der in die  $E_n$  thans geoorloofde coördinatentransformaties de differentiaal van een affinor weer een affinor is met dezelfde valenties en de afgeleide een affinor met één covariantie valentie meer. A fortiori geldt dit natuurlijk ook in een  $R_n$ .

We zouden in een  $E_n$  of  $R_n$  nu echter ook wel eens graag andere, zogenaamde "kromlijnige" coördinaten gebruiken. Zij  $(k); k=1, \dots, n$  een gewoon, d.i. rechtlijnig coördinatenstelsel en  $(\bar{k}); \bar{k}=1, \dots, n$  een kromlijnig. Laat verder een vectorveld gegeven zijn met de kentallen  $v^{\bar{k}}$  o.t.o. van  $(\bar{k})$  en de kentallen  $v^k$  o.t.o. van  $(k)$ . Dan is

$$3.31) \quad v^{\bar{k}} = A_{\bar{k}}^k v^k$$

en dientengevolge

$$3.32) \quad dv^{\bar{k}} = A_{\bar{k}}^k dv^k + v^k dA_{\bar{k}}^k \\ = A_{\bar{k}}^k (dv^k + A_i^k d\xi^i v^{\lambda} \partial_\lambda A_{\bar{k}}^k)$$



Nu is  $dv^{\bar{k}}$  een vector, namelijk de vector die verkregen wordt door  $v^{\bar{k}}$  van  $\xi^{\bar{k}}$  naar  $\xi^{\bar{k}} + d\xi^{\bar{k}}$  parallel te verplaatsen (dit kan in een  $E_n$ ) en aldaar af te trekken van de veldwaarde  $v^{\bar{k}} + dv^{\bar{k}}$  aldaar. Zolang we alleen rechtlijnige coördinaten gebruiken, transformeert  $dv^{\bar{k}}$  zich behoorlijk als een vector

$$3.34) \quad dv^{\bar{k}} = A_{\bar{k}}^k dv^k; \\ A_{\bar{k}}^k = \partial_{\bar{k}} \xi^k = \text{constanten}$$

Maar zodra we kromlijnige coördinaten invoeren zijn de  $dv^k$  niet meer de kentallen van deze verschilvector maar

Behalve met de covariante differentiaal werken we ook veel met de corresponderende covariante afgeleide, aangeduid door het nabla-symbool  $\nabla_\mu$ , bijv.:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu v^\kappa &= \partial_\mu v^\kappa + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda \\
 \nabla_\mu w_\lambda &= \partial_\mu w_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa w_\kappa \\
 3.41) \quad \nabla_\mu P^{\kappa\lambda}{}_{\dots\nu} &= \partial_\mu P^{\kappa\lambda}{}_{\dots\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\kappa P^{\rho\lambda}{}_{\dots\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda P^{\kappa\rho}{}_{\dots\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho P^{\kappa\lambda}{}_{\dots\rho}
 \end{aligned}$$

We hebben gezien dat men van een  $\mathcal{E}_2$  tot een  $R_2$  kan komen door één coördinatenstelsel te kiezen en verder alleen de orthogonale groep toe te laten, maar ook door een tweedegraadskromme in te voeren. Dat kunnen we nu ook in een  $\mathcal{E}_n$  doen. We voegen het niet bijzondere hyperoppervlak toe met de vergelijking

$$3.42) \quad g_{\lambda\kappa} \xi^\lambda \xi^\kappa = \pm 1$$

in rechtlijnige coördinaten. Dat wil zeggen we voeren de reële tensor  $g_{\lambda\kappa}$  van de rang  $n$  met constante kentallen toe. Er bestaat zoals we gezien hebben tenminste één rechtlijnig coördinatenstelsel  $(h)$  zodanig dat

$$3.43) \quad g_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & \text{voor } i=j \\ 0 & \text{voor } i \neq j \end{cases}$$

Is  $(h')$  een ander rechtlijnig coördinatenstelsel dan is (3.43) voor de transformatie  $(h) \rightarrow (h')$  dan en alleen dan invariant indien

$$3.44) \quad A_{i'j'}^{ij} g_{ij} = \begin{cases} g_{i'i} & \text{voor } i'=j' \\ 0 & \text{voor } i' \neq j' \end{cases}$$

Deze transformaties vormen de orthogonale groep behorende bij de fundamenteeltensor  $g_{\lambda\kappa}$ . Met behulp van  $g_{\lambda\kappa}$  kan men nu "lengten" en "hoeken" gaan definiëren. Is  $g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa$  positief (negatief) dan heet  $v^\kappa$  een vector van het + -gebied (- -gebied), is  $g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa = 0$  dan heet  $v^\kappa$  een nulvector. Reële nulvectoren bestaan alleen bij indefiniëte fundamenteeltensor, zij vullen den nulkegel (vergelijking  $g_{\lambda\kappa} \xi^\lambda \xi^\kappa = 0$ ). De uitdrukking

$$3.45) \quad |(g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa)^{1/2}|$$

heet lengte van  $v^\kappa$  (in de physica ook wel lengte in het -gebied en duur in het + -gebied). Twee vectoren  $u^\kappa$  en  $v^\kappa$  heten onderling loodrecht indien

$$3.46) \quad g_{\lambda\kappa} u^\lambda v^\kappa = 0$$

Een nulvector is loodrecht op zichzelf. De hoek tussen twee vectoren  $u^k$  en  $v^k$ , die beide in het + -gebied of beide in het - -gebied liggen, wordt als volgt gedefinieerd

$$3.47) \quad \cos \varphi = \frac{\pm g_{\lambda k} u^\lambda v^k}{\text{length } u^k \times \text{length } v^k} \quad \text{voor } \pm \text{ gebied}$$

De hoek tussen een vector in het + -gebied en een vector in het - -gebied wordt niet gedefinieerd behalve in het geval dat zij onderling loodrecht zijn wegens de boven gegeven definitie.

De  $\mathcal{E}_n$ , aldus uitgerust met een speciaal stel geoorloofde coördinaten of ook, wat hetzelfde is, met een reële fundamentealtensor van willekeurige signatuur heet  $R_n$ . De orthogonale coördinaten in  $R_n$  geven we liefst aan met latijnse indices en verticale getallen, andere rechtlijnige of kromlijnige coördinaten met griekse indices en cur-sieve getallen.

Stel nu eens dat we ook in  $R_n$  kromlijnige coördinaten  $\xi^k$  willen gaan invoeren. Dan weten we al dat de covariante differentiaal van een vectorveld  $v^k$  gegeven is door (3.35)

$$3.48) \quad \nabla v^k = dv^k + \Gamma_{\mu\lambda}^k v^\lambda d\xi^\mu; \quad \Gamma_{\mu\lambda}^k = A_i^k \partial_\mu A_\lambda^i$$

waarin de index  $i$  moet behoren tot enig rechtlijnig coördinatenstelsel waarvoor dus hier één der orthogonale coördinatenstelsels kan worden gekozen. Maar aangezien de orthogonale stelsels door  $g_{\lambda k}$  vastgelegd worden moet het mogelijk zijn  $\Gamma_{\mu\lambda}^k$  in  $g_{\lambda k}$  en zijn afgeleiden uit te drukken. Nu is  $g_{ij}$  een tensor en dus zijn zijn algemene kentallen

$$3.49) \quad g_{\mu\lambda} = A_\mu^j A_\lambda^i g_{ji}$$

Deze  $g_{\lambda k}$  zijn echter geen constanten meer aangezien de  $A_k^h = \partial_k \xi^h$  geen constanten meer zijn. Differentiatie van (3.49) levert

$$3.50) \quad \partial_\nu g_{\mu\lambda} = (\partial_\nu A_\mu^j) A_\lambda^i g_{ji} + A_\mu^j (\partial_\nu A_\lambda^i) g_{ji}$$

Schrijven we dezelfde vergelijking nog tweemaal op met gepermuteerde indices, de laatste vermenigvuldigende met -1

$$3.51) \quad \begin{aligned} \partial_\lambda g_{\nu\mu} &= (\partial_\lambda A_\nu^j) A_\mu^i g_{ji} + A_\nu^j (\partial_\lambda A_\mu^i) g_{ji} \\ - \partial_\mu g_{\lambda\nu} &= -(\partial_\mu A_\lambda^j) A_\nu^i g_{ji} - A_\lambda^j (\partial_\mu A_\nu^i) g_{ji} \end{aligned}$$

en tellen we alles op, dan vallen er vier termen weg (aangezien  $\partial_\nu A_\mu^i = \partial_\mu A_\nu^i$ ) en er blijft

$$3.52) \quad \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}) = A_\mu^j (\partial_\nu A_\lambda^i) g_{ji}$$

Schrijven we nu  $g^{k\lambda}, g^{ki}$  voor de kentallen van de omkering van  $g_{\lambda k}$  dan volgt

$$3.53) \quad \Gamma_{\mu\lambda}^k = A_i^k \partial_\mu A_\lambda^i = \frac{1}{2} g^{k\nu} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})$$

De uitdrukking rechts werd door Christoffel gevonden in 1862. Hij gebruikte het symbool  $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu\lambda \\ \kappa \end{smallmatrix} \right\}$ . Tegenwoordig schrijven we  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\}$  en noemen dit het Christoffel symbool. Het is goed tussen  $\Gamma_{\mu\lambda}^k$  en  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\}$  te onderscheiden omdat  $\Gamma_{\mu\lambda}^k$  later ook in veel algemenere betekenissen gebruikt wordt.

Hiermede is de covariante differentiatie in een  $R_n$  vastgelegd aan de fundamentealtensor. Aangezien  $\partial_j g_{ik}$  identiek nul is volgt, dat ook  $\nabla_\mu g_{\lambda k}$  nul moet zijn. Men overtuige zich hiervan door uitschrijven. Men overtuige zich ook dat  $\nabla_\mu A_\lambda^k$  nul is en dat de eis  $\nabla_\mu A_\lambda^k = 0$  gelijkwaardig is met de eis dat de covariante differentiaal van een scalar gelijk is aan de gewone differentiaal.

Is een  $E_n$  door invoering van een fundamenteaal tensor  $g_{\lambda k}$  (met constante kentallen t.o.v. enig en dus voor ieder rechtlijnig coördinatenstelsel) tot  $R_n$  gestempeld dan legt  $g_{\lambda k}$  een één-één correspondentie vast tussen co- en contravariante vectoren.

$$3.54) \quad w_\lambda = g_{\lambda k} v^k; \quad v^k = g^{k\lambda} w_\lambda$$

In plaats van  $w_\lambda$  schrijft men nu  $v_\lambda$  en men beschouwt  $v^k$  en  $v_\lambda$  als één enkel geometrisch object, de vector zonder meer waarvan de pijl  $v^k$  en het dubbel hypervlak  $v_\lambda$  twee gelijkwaardige meetkundige voorstellingen zijn. Ingevolge

$$3.55) \quad v^k v_\kappa = v^k g_{\kappa\lambda} v^\lambda$$

is de zin van  $v^k$  gelijk of tegengesteld aan de zin van  $v_\lambda$  alnaarmate  $v^k$  in het + gebied of in het - gebied ligt. Bij een nulvector ligt  $v^k$  in de nulkegel en raakt  $v_\lambda$  langs  $v^k$  aan de nulkegel (gecentreerde  $R_n$ ). Het proces  $v^k \rightarrow v_\lambda$  en  $v_\lambda \rightarrow v^k$  noemt men het op- en neerhalen van indices. Men kan dit proces natuurlijk ook op een of meer indices van een affinor toepassen. Ingevolge  $\nabla_\mu g_{\lambda k} = 0$  is het proces commutatief met het proces der covariante differentiatie, bijv.

$$3.56) \quad \nabla_\mu P^{\dots k \dots}_{\dots \lambda \dots} = \nabla_\mu g_{\lambda p} P^{\dots k \dots p}_{\dots \dots} = g_{\lambda p} \nabla_\mu P^{\dots k \dots p}_{\dots \dots}$$

#### Geometrische duiding van p-vectoren.

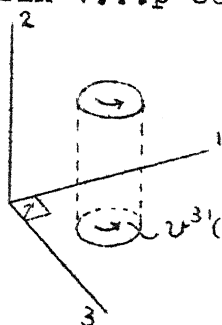
Alternerende vermenigvuldiging van p contravariante of p covariante vectoren geeft een p- vector, bijv.

$$3.57) \quad v^{k_1 \dots k_p} = p! v_1^{[k_1} \dots v_p^{k_p]}$$

Een dergelijke p-vector heet enkelvoudig. Men kan bewijzen, dat de n.c.v. voorwaarden voor het enkelvoudig zijn luiden

$$3.58) \quad v^{[k_1 \dots k_p} v^{\lambda]} \dots v^{\lambda_p} = 0$$

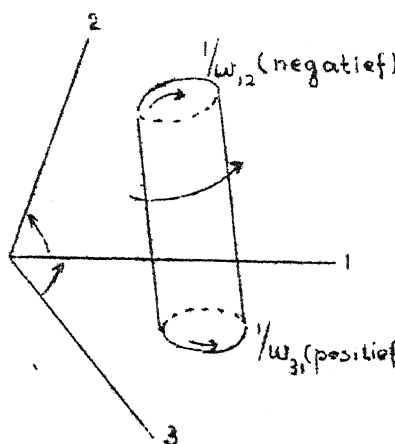
Hetzelfde geldt voor een covariante p-vector. Het meetkundige beeld van  $v^{k_1 \dots k_p}$  is het parallelotoop der p vectoren  $v_1^{k_1}, \dots, v_p^{k_p}$  voorzien met een schroefzin die door de volgorde dier vectoren is vastgelegd, of ook een p-dimensionaal ruimtedeel van willekeurige vorm in de  $\mathcal{E}_p$  dier vectoren, voorzien van die schroefzin. Het kental  $v^{1 \dots p}$  is de projectie van deze figuur op de  $\mathcal{E}_p$  van de eerste p assen gemeten met behulp van het parallelotoop der maatvectoren op die assen en voorzien van een + of - teken alnaarmate de meegeprojecteerde schroefzin met de schroefzin 1...p correspondeert of niet.



Schrijft men een enkelvoudige covariante p-vector

$$3.59) \quad w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = p! \, w_{[\lambda_1} \dots w_{\lambda_p]}$$

dan bepalen de dubbel hypervlakken der p vectoren in  $\mathcal{E}_n$  een balk, waarvan de begrenzing bestaat uit  $\infty^{p-1}$  parallelle  $\mathcal{E}_{n-p}$ 's en die een oriëntering heeft om de balk heen, vastgelegd door de volgorde der vectoren. In plaats van deze balk met oriëntering kan men weer een cylinder nemen met dezelfde doorsnede. Dan is  $1/w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  de doorsnede van die cylinder met de  $\mathcal{E}_p$  van de eerste p assen, gemeten als boven en voorzien van een + of - teken alnaarmate de schroefzin om de cylinder correspondeert met de schroefzin 1...p of niet.



De covariante en de contravariante n-vector hebben hetzelfde meetkundige beeld, een n-dimensionaal ruimtedeel met een schroefzin. Maar in het ene geval is het kental de inhoud en in het andere geval is het  $1/\text{inhoud}$ . Bij elk rechtlijnig coördinatenstelsel in  $\mathcal{E}_n$  behoren voor iedere waarde van p van 1 tot n een stel van  $\binom{n}{p}$  enkelvoudige contravariante en een stel van  $\binom{n}{p}$  enkelvoudige covariante p-vectoren, te weten de alternerende producten van p maatvectoren. Voor p=1 en p=n zijn deze ook inclusief het teken bepaald. Vooral de n-vectoren

$$3.60) \quad \mathcal{E}_{(k)}^{k_1 \dots k_n} = n! \, e_1^{[k_1} \dots e_n^{k_n]}; \quad \mathcal{E}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(k)} = n! \, e_{[\lambda_1}^1 \dots e_{\lambda_n]}^n$$

zijn belangrijk. Zij mogen vooral niet verward worden met  $\epsilon^{k_1 \dots k_n}$  en  $\epsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ , daar zij bij een bepaald coördinatenstelsel behoren.

#### § 4. Krommen in $R_n$

We gaan nu een reële kromme in een  $R_n$  met een positief definiten fundamentealtensor behandelen met kromlijnige coördinaten  $\xi^k$ . Zij de kromme gegeven door

$$4.1) \quad \xi^k = \xi^k(t)$$

waarin  $t$  een willekeurige parameter op de kromme is. De lengte van  $d\xi^k$  is gegeven door

$$4.2) \quad ds = \left| \sqrt{g_{\lambda k} d\xi^\lambda d\xi^k} \right|$$

$ds$  is overal positief en  $\int ds$  genomen vanaf enig vast punt der kromme kan als parameter  $s$  worden ingevoerd. Dat legt in alle punten van de kromme behalve het vaste punt een zin vast, de zin van de toename van  $s$ . Langs de kromme is nu de eenheidsvector

$$4.3) \quad J_1^k = \frac{d\xi^k}{ds}$$

eenduidig vastgelegd. De zin van  $J_1^k$  is de zin van toename van  $s$ . Daar we kromlijnige coördinaten gebruiken is  $\frac{d}{ds} J_1^k$  geen vector meer. Maar  $\frac{\delta}{\delta s} J_1^k$  is wel een vector, en wel  $\perp J_1^k$ :

$$4.4) \quad 0 = \delta(J_1^k J_{1k}) = 2 J_{1k} \delta J_1^k$$

Er bestaat dus voor  $\delta J_1^k \neq 0$  één enkele eenheidsvector  $J_2^k$  langs de kromme zodat

$$4.5) \quad \frac{\delta}{\delta s} J_1^k = \kappa_1 J_2^k; \quad \kappa_1 \geq 0$$

Is  $\delta J_1^k$  overal  $= 0$  dan is de kromme een rechte. Is  $\delta J_1^k$  ergens  $= 0$ , dan is daar een inflexiepunt van de eerste orde en de waarde van  $J_2^k$  wordt dan aldaar zo gekozen dat  $J_2^k$  langs de kromme continu en een voldoende aantal malen differentieerbaar blijft. Gelukt dat niet, dan wordt het punt uitgeschakeld.  $\kappa_1$  is de eerste kromming,  $2 J_1^{[k} J_2^{\lambda]}$  de osculerende bivector en zijn vlak het osculatievlak. Ingevolge (4.5) laat zich  $\frac{\delta}{\delta s} J_2^k$  schrijven,

$$4.6) \quad \frac{\delta}{\delta s} J_2^k = -\kappa_1 J_1^k + \kappa_2 J_3^k$$

waarin  $J_3^k$  een geschikt gekozen eenheidsvector  $\perp$  op  $J_1^k$  en  $J_2^k$  is.  $\kappa_2 J_3^k$  ligt vast maar  $\kappa_2$  en  $J_3^k$  elk alleen maar op het teken na. We nemen hier aan dat  $\kappa_2$  altijd  $= 0$  is. Mocht  $\kappa_2 \neq 0$  zijn, dan is

$$4.7) \quad \frac{\delta}{\delta s} J_1^{[k} J_2^{\lambda]} = 0$$

dat wil zeggen, dat het osculatievlak voor alle punten van de kromme hetzelfde is. De kromme is dan een vlakke kromme. Is  $\kappa_1$  ergens  $= 0$  dan is daar een inflexiepunt van de tweede orde en de waarde van  $J_3^k$  wordt dan aldaar zo mogelijk zo gekozen dat  $J_3^k$  langs de kromme continu en een voldoende aantal malen differentieerbaar blijft. Gelukt dat niet, dan wordt het punt uitgezonderd.  $\kappa_2$  is de tweede kromming,  $6 J_1^{[k} J_2^{\lambda} J_3^{\mu]}$  de osculerende trivector en zijn  $R_3$  de osculerende  $R_3$ . Ingevolge (4.5) en (4.6) is  $J_1^k \delta J_3^k = 0$  en  $J_2^k \frac{\delta}{\delta s} J_3^k = -\kappa_2$ . Bijgevolg laat zich  $\frac{\delta}{\delta s} J_3^k$  schrijven

$$4.7) \quad \boxed{\frac{\delta}{\delta s} J_3^k = -\kappa_2 J_2^k + \kappa_3 J_4^k} \quad \kappa_3 \geq 0$$

waarin  $J_4^k \perp$  op  $J_1^k, J_2^k$  en  $J_3^k$  is.  $J_4^k$  is volledig bepaald als  $\kappa_3 \neq 0$   
Is  $\kappa_3 = 0$

dan is

$$4.8) \quad \frac{\delta}{ds} j_1^{[\kappa} j_2^{\lambda} j_3^{\mu]} = 0$$

dan is de kromme gelegen in een  $\mathcal{R}_3$ . Is  $\kappa_3$  ergens = 0 dan is daar een inflexiepunt van de derde orde en men legt  $j_4^{[\kappa}$  weer zo mogelijk door continuïteit en differentieerbaarheid vast. Anders uitschakeling als voren.  $\kappa$  is de derde kromming,  $24 j_1^{[\kappa} j_2^{\lambda} j_3^{\mu} j_4^{\nu]}$  de osculerende 4-vector en zijn  $\mathcal{R}_4$  de osculerende  $\mathcal{R}_4$ .

Zo kan men doorgaan totdat bijvoorbeeld  $\kappa_m = 0$  langs de kromme. Dan ligt de kromme in een  $\mathcal{R}_m$  en de laatste vergelijking van Frenet is

$$4.9) \quad \boxed{\frac{\delta}{ds} j_m^{[\kappa} = -\kappa_{m-1} j_{m-1}^{[\kappa}} \quad ; \quad \kappa_{m-1} \geq 0$$

In de  $\mathcal{R}_m$  vormen  $j_1^{[\kappa}, \dots, j_m^{[\kappa}$  in deze volgorde een rechts of een links systeem. Dat wil dan zeggen dat de kromme in alle punten een rechtse of een linkse schroef is.

We vatten de formules van Frenet samen. Daartoe schrijven we naast  $\kappa_m = 0, \dots, \kappa_0 = 0$  en bij definitie  $\kappa_0 = 0$ . Dan luidt de algemene formule

$$4.10) \quad \boxed{\frac{\delta}{ds} j_p^{[\kappa} = -\kappa_{p-1} j_{p-1}^{[\kappa} + \kappa_p j_{p+1}^{[\kappa}} \quad p=1 \dots n$$

$\kappa_0 = 0; \kappa_n = 0; \dots; \kappa_{n+1} = 0.$

en we weten zeker dat niet één der coëfficiënten  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  over de gehele kromme nul kan zijn. Wel kunnen een of meer dezer coëfficiënten in enig punt van de kromme nul worden.

Het is van belang het getal  $m$ , dat aangeeft dat de kromme in een  $\mathcal{R}_m$ ,  $m \leq n$  ligt, vlug te bepalen zonder daartoe al de eenheidsvectoren uit de Frenetformules uit te rekenen. Daartoe merken we op dat het vlak van  $j_1^{[\kappa}$  en  $j_n^{[\kappa}$  ook het vlak is van  $\frac{d}{ds} j_1^{[\kappa}$  en  $\frac{d}{ds} j_n^{[\kappa}$  blijkens (4,5). Evenzo blijkt uit (4,6) dat de  $\mathcal{R}_3$  van  $j_1^{[\kappa}, j_2^{[\kappa}$  en  $j_3^{[\kappa}$  ook de  $\mathcal{R}_3$  is van

$$4.11) \quad \frac{d\xi^{\kappa_1}}{ds}, \frac{\delta}{ds} \frac{d\xi^{\kappa_2}}{ds} \text{ en } \frac{\delta}{ds} \frac{\delta}{ds} \frac{d\xi^{\kappa_3}}{ds} \text{ enz. Bijgevolg is}$$

$$\frac{d\xi^{\kappa_1}}{ds} \frac{\delta}{ds} \frac{d\xi^{\kappa_2}}{ds} \dots \left( \frac{\delta}{ds} \right)^{m-1} \frac{d\xi^{\kappa_m}}{ds} \neq 0 \quad \frac{d\xi^{\kappa_1}}{ds} \frac{\delta}{ds} \frac{d\xi^{\kappa_2}}{ds} \dots \left( \frac{\delta}{ds} \right)^m \frac{d\xi^{\kappa_{m+1}}}{ds} = 0$$

endarmede is een weg aangegeven om  $m$  te vinden door eenvoudige differentiatieprocessen.

We gaan nu bewijzen dat een reële kromme in  $\mathcal{R}_n$  op rotaties en translaties na volledig bekend is indien  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  als functies van  $s$  gegeven zijn en voor  $m=n$  bovendien gegeven is of de kromme rechts of links genomen is. Laten we aannemen dat er twee dergelijke reële krommen zijn met dezelfde functies en eventueel dezelfde schroeven. Stel dat de eenheidsvectoren in de tangente en de nor-

maken zijn  $j_1^k$ ,  $j_n^k$  en  $k_1^k$ ,  $k_n^k$  resp. Dan zijn dit in de twee punten  $s=0$  of beiden rechtse stelsels of beiden linkse stelsels. Men kan dus de tweede kromme door translatie en rotatie zo verplaatsen dat de punten  $s=0$  samen vallen en dat in dit punt  $j_l^k = k_l^k$ ;  $l = 1, \dots, n$ . Verder is nu in deze stand

$$4.12) \quad \frac{d}{ds} j_p^k = -\frac{k}{p-1} j_{p-1}^k + \frac{k}{p} j_{p+1}^k \quad p = 1, \dots, m.$$

$$\frac{d}{ds} k_p^k = -\frac{k}{p-1} k_{p-1}^k + \frac{k}{p} k_{p+1}^k \quad k = 0 \text{ ; } m = 0$$

en daaruit volgt

$$4.13) \quad \frac{d}{ds} j_p^k k_p^k = -\frac{k}{p-1} j_{p-1}^k k_p^k + \frac{k}{p} j_{p+1}^k k_p^k$$

$$- \frac{k}{p-1} j_p^k k_{p-1}^k + \frac{k}{p} j_p^k k_{p+1}^k$$

en bijgevolg

$$4.14) \quad \frac{d}{ds} \sum_p^{1..m} j_p^k k_p^k = m.$$

Nu vallen de  $j$ -vectoren met de  $k$ -vectoren samen in  $s=0$  en dus is voor alle waarden van  $s$

$$\sum_p^{1..m} j_p^k k_p^k = m.$$

Dit kan echter bij reële eenheidsvectoren alleen indien voor alle waarden van  $s$

$$4.16) \quad j_1^k = k_1^k ; \dots ; j_m^k = k_m^k$$

Hiervan hebben we nu alleen de eerste vergelijking nodig, die tot uitdrukking brengt dat voor beide krommen de  $\frac{d\xi^k}{ds}$  voor alle waarden van  $s$  dezelfde waarden hebben. Daaruit volgt de identiteit der beide krommen want voor  $s=0$  is  $\xi^k$  voor de ene kromme gelijk aan  $\xi^k$  voor de andere. Dit is het andere bewijs waarnaar bij (1.22) verwezen werd

Bij een algemene kromme  $m=n$  in een  $R_n$  heeft men een raaklijn, een osculatiecirkel en de osculerende  $R_2$ , een osculerende bol en de osculerende  $R_3$  enz. tot en met een osculerende hyperbol in de osculerende  $R_{n-1}$ . Op deze laatste hyperbol liggen de osculatiecirkel, de osculerende bol en alle andere osculerende hyperbollen. Bij de berekening van de osculerende hyperbol die net eender verloopt als in §1 doet men verstandig rechtlijnige coördinaten te gebruiken. Want alleen voor die coördinaten stelt  $\xi^k$  een vector voor. Zij nu

$\xi^k = \rho^k(s)$  de vergelijking van de kromme met  $\xi^k = 0$  voor  $s=0$  en zij

$$4.17) \quad F(\xi^k) \stackrel{\text{def.}}{=} (\xi^k - \xi_0^k)(\xi^\lambda - \xi_0^\lambda) g_{k\lambda} - R^2$$

de osculerende bol in  $\xi^k = 0$  met straal  $R$  en middelpunt  $\xi_0^k$ . Dan moeten de functie

$$4.18) \quad \Phi(s) \stackrel{\text{def.}}{=} F(\rho^k(s)) = (\rho^k(s) - \xi_0^k)(\rho^\lambda(s) - \xi_0^\lambda) g_{k\lambda} - R^2$$



en de eerste  $n$  afgeleiden van die functie nul zijn voor  $s=0$ . Dat geeft voor  $\int_{\lambda}^{\kappa} = \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa}; \dots; \int_{\lambda}^{\kappa} = \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa}$  in  $\xi^{\kappa} = 0$  de vergelijkingen

$$4.19) \quad \begin{aligned} \sum_{\lambda}^{\kappa} \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa} &= R^2 \\ \sum_{\lambda}^{\kappa} \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa} \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa} &= 0 \\ \sum_{\lambda}^{\kappa} \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa} \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa} &= \frac{1}{\kappa} \\ \sum_{\lambda}^{\kappa} \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa} \dot{\xi}_{\lambda}^{\kappa} &= \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \end{aligned}$$

waaruit direct volgt  $\psi_p(\kappa_1, \frac{d\kappa_1}{ds}, \dots, \frac{d\kappa_{p-1}}{ds}, \kappa_p, \frac{d\kappa_p}{ds}, \dots, \kappa_n) \quad p=1, \dots, n$

$$4.20) \quad \sum_0^{\kappa} = \psi_2^{\kappa} + \dots + \psi_n^{\kappa}; \quad R^2 = \psi_1^2 + \dots + \psi_n^2$$

## § 5. Krommen in $\mathcal{E}_n$

Zij

$$5.1) \quad \xi^{\kappa} = f^{\kappa}(t)$$

de parametervergelijking van een kromme in  $\mathcal{E}_n$  algemene niet noodzakelijk rechtlijnige coördinaten. Achteereenvolgens vormen we nu de vectoren

$$5.2) \quad v_1^{\kappa} = \frac{d\xi^{\kappa}}{dt}; \quad v_2^{\kappa} = \frac{\delta}{\delta t} v_1^{\kappa}; \quad \text{algemeen} \quad v_p^{\kappa} = \frac{\delta}{\delta t} v_{p-1}^{\kappa}$$

en zetten dit proces zo lang voort als de nieuw gewonnen vector nog lineair onafhankelijk is van de vorige. Stel dat  $v_m^{\kappa}$ ;  $m \leq n$  de laatste vector van de rij is. Dan geldt

$$5.3) \quad \frac{\delta}{\delta t} [v_1^{\kappa} \dots v_m^{\kappa}] = \alpha [v_1^{\kappa} \dots v_m^{\kappa}]$$

waarin  $\alpha$  een functie der  $\xi^{\kappa}$  is. Uit (5.3) volgt dat de  $\mathcal{E}_m$  van  $[v_1^{\kappa} \dots v_m^{\kappa}]$  langs de kromme constant is en dat door de kromme in een  $\mathcal{E}_m$  in  $\mathcal{E}_n$  ligt. Daar we dan in die  $\mathcal{E}_m$  kunnen gaan werken kunnen we evengoed  $m=n$  stellen. Voeren we in deze onderstelling een andere parameter  $s$  in (dit is geen lengte!) en schrijven we  $t', t''$  voor de afgeleiden van  $t$  naar  $s$ , dan is

$$5.4) \quad \begin{aligned} u_1^{\kappa} &= \frac{d\xi^{\kappa}}{ds} = t' v_1^{\kappa} \\ u_2^{\kappa} &= \frac{\delta}{\delta s} \frac{d\xi^{\kappa}}{ds} = (t')^2 v_2^{\kappa} + t'' v_1^{\kappa} \\ u_n^{\kappa} &= \left(\frac{\delta}{\delta s}\right)^{n-1} \frac{d\xi^{\kappa}}{ds} = (t')^n v_n^{\kappa} + \dots \end{aligned}$$

en bijgevolg

$$5.5) \quad u_1^{\kappa} \dots u_n^{\kappa} = (t')^{(n+1)} v_1^{\kappa} \dots v_n^{\kappa}$$

Nu weten we zeker dat  $\alpha$  in (5.3) een berekenbare functie is van  $t$ , omdat immers alle covariante differentiaal van  $v_1^{\kappa}, \dots, v_n^{\kappa}$  lineair van deze vectoren afhangen. Stellen we dus de invariante eis dat  $s$  zodanig wordt gekozen, dat de covariante differentiaal van  $u_1^{\kappa} \dots u_n^{\kappa}$  langs de kromme overal nul is, dan volgt:

$$5.6) \quad \binom{n+1}{2} (t')^{\binom{n+1}{2}-1} t'' + (t')^{\binom{n+1}{2}+1} \alpha = 0$$

of

$$5.7) \quad \binom{n+1}{2} t'' + \alpha (t')^2 = 0$$

welke vergelijking gelijkwaardig is met

$$5.8) \quad \binom{n+1}{2} \frac{d^2 s}{dt^2} - \alpha \frac{ds}{dt} = 0$$

De oplossing is van de vorm

$$5.9) \quad s = C_1 \varphi(t) + C_2$$

waarin twee integratieconstanten voorkomen. Bijgevolg wordt door de ingevoerde invariante eis een parameter op de kromme vastgelegd die op een verschuiving van het nulpunt en een verandering van de maat-eenheid volkomen is vastgelegd. Deze parameter heet de affine parameter van de kromme in  $\mathcal{E}_n$ .

In een  $\mathcal{E}_n$  is het nu gemakkelijk een n-vector aan te wijzen, waarvan de constante differentiaal nul is. Ga daartoe terug tot een rechtlijnig coördinatenstelsel  $(k)$  en noem de n contravariante meetvectoren, die bij dit stelsel behoren  $e_\lambda^k$ :

$$5.10) \quad e_\lambda^k = \begin{cases} 1 & \text{voor } k = \lambda \\ 0 & \text{voor } k \neq \lambda \end{cases}$$

Dan is  $\tilde{d}e_\lambda^k = de_\lambda^k = 0$  en bijgevolg is ook de covariante differentiaal van de n-vector

$$5.11) \quad \mathcal{E}_{(k)}^{k_1 \dots k_n} \stackrel{\text{def}}{=} n! \cdot e_1^{[k_1} \dots e_n^{k_n]} \quad (\text{dus } \mathcal{E}_{(k)}^{1 \dots n} = +1)$$

gelijk nul. Gaat men tot een ander rechtlijnig stelsel  $(k')$  over dan is

$$5.12) \quad \mathcal{E}_{(k')}^{k_1 \dots k_n} = \Delta \mathcal{E}_{(k)}^{k_1 \dots k_n}; \quad \Delta = \text{Det} \left( \frac{\partial \xi^{k'}}{\partial \xi^k} \right)$$

en  $\Delta$  is een constante. Men kan <sup>het</sup> dus door geschikte keuze van de constante  $C_1$  in (5.9) zo inrichten dat voor één bepaalde keuze van het coördinatenstelsel  $(k)$

$$5.13) \quad u_\lambda^{[k_1} \dots u_n^{k_n]} = \mathcal{E}_{(k)}^{k_1 \dots k_n}$$

Beperkt men zich zoals veelal in publicaties over affiene differentiaalmeetkunde geschiedt tot rechtlijnige coördinaten in  $\mathcal{E}_n$  en bovendien tot transformaties met  $\Delta = 1$  (de speciaal affine-groep), bedrijft men dus zogenaamde volumegetrouwe affiene meetkunde dan is s op de ligging van het nulpunt na geheel vastgelegd, zodat men aan elk stuk der kromme een speciaal-affiene lengte kan toekennen.

Geldt (5.13), dan vindt men s eenvoudig uit (5.5) en (5.13):

$$5.14) \quad s = \int (u_\lambda^{[1} \dots u_n^{n]})^{\frac{1}{\binom{n+1}{2}}} dt + C$$

Uit deze formule zien we dat  $s$  een differentiaal invariant van de  $n$ -de orde is.

Met behulp van de affine parameter gaan we vergelijkingen afleiden die enigszins op die van Frenet in een  $R_n$  lijken. Zij  $\xi^k = 0$  een punt van de kromme. Kies dan aldaar  $s=0$ , dan is  $s$  op een constante factor na vastgelegd, Kies vervolgens in  $\mathcal{E}_n$  enig rechtlijnig coördinatenstelsel  $(\kappa)$  en laat verder alleen transformaties met  $\Delta = +1$  toe. Daarmede is dan  $s$  helemaal vastgelegd. Dan hebben we de speciaal affien invariante vergelijkingen.

$$5.15) \quad \frac{d}{ds} u_{\lambda}^{[\kappa]} u_n^{\kappa]} = 0$$

en hieruit volgt dat er een vergelijking moet bestaan van de vorm

$$5.16) \quad \frac{d}{ds} u_n^{\kappa} + k_{\lambda}^{\kappa} u_{n-1}^{\lambda} + \dots + k_{n-1}^{\kappa} u_{\lambda}^{\lambda} = 0$$

waarin  $k_{\lambda}^{\kappa}$ ,  $k_{n-1}^{\kappa}$ , functies van  $s$  zijn, die men als speciaal affine eerste, tweede, enz. speciaal affine kromming zou kunnen opvatten. Maar de analogie met de formules van Frenet in  $R_n$  is slechts zeer oppervlakkig en het is niet zo dat deze krommingen over zouden gaan in de gewone indien men in  $\mathcal{E}_n$  een fundamentealtensor zou gaan invoeren. Wel blijft waar dat  $k_{\lambda}^{\kappa}$ ,  $k_{n-1}^{\kappa}$ , als functies van  $s$  gegeven, de kromme op speciaal affine transformaties na vastleggen. Beschouwen we daartoe de differentiaalvergelijking van de orde  $n$

$$5.17) \quad z_{(n)} + k_{\lambda}^{\kappa} z_{(n-1)} + \dots + k_{n-1}^{\kappa} z = 0; \quad z_{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i z}{ds^i}$$

voor een functie  $z(s)$ . Stel eens dat we van deze differentiaalvergelijking  $n$  lineair onafhankelijke oplossingen  $z^1, \dots, z^n$  hadden dan is blijkbaar

$$5.18) \quad \frac{d}{ds} z_{(i)}^{[\kappa]} z_{(n-i)}^{\kappa]} = 0$$

hetgeen men ook kan uitdrukken door te zeggen dat de zogenaamde Wronskische determinant van  $z^1, \dots, z^n$

$$5.19) \quad \begin{vmatrix} z^1 & \dots & z^n \\ z_{(1)}^1 & \dots & z_{(1)}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{(n-1)}^1 & \dots & z_{(n-1)}^n \end{vmatrix}$$

een constante is. Iedere homogene lineaire functie van  $z^1, \dots, z^n$  met constante coëfficiënten is weer een oplossing en men kan dus gemakkelijk  $z^1, \dots, z^n$  zo kiezen dat die determinant juist  $= +1$  is. Dan volgt echter, dat

$$5.20) \quad u_{\lambda}^{\kappa} = C_{\lambda}^{\kappa} z^{\lambda}; \quad C_{\lambda}^{\kappa} = \text{constanten}; \quad \text{Det}(C_{\lambda}^{\kappa}) = +1$$

de meest algemene oplossing van (5.16) is bij gegeven  $k_{\lambda}^{\kappa}, \dots, k_{n-1}^{\kappa}$ , die tegelijk aan (5.15) voldoet. Daar echter  $u_{\lambda}^{\kappa} = \frac{dz^{\kappa}}{ds}$  volgt wegens

$s=0$  voor  $\xi^k = 0$

$$5.21) \quad \xi^k = C^k_{\lambda} \int_0^s z^{\lambda} ds$$

De kromme is dus inderdaad op een speciaal-affine transformatie na vastgelegd.

Intussen is er een ernstig bezwaar tegen deze gehele behandelingswijze. Men kan eens alles gaan uitdrukken in  $v^k = \frac{d\xi^k}{dt}$  en alles wat daaruit door differentiatie naar de algemene parameter  $t$  ontstaan kan. Ingevolge (5.5) en (5.13) is

$$5.22) \quad \frac{ds}{dt} = \left( v^1 \quad v^n \right) \frac{1}{(n+1)}$$

en bijgevolg is  $\frac{dt}{ds}$ , waarvoor we eens  $\varphi(t)$  zullen schrijven, een bekende functie van  $t$ . Differentiatie naar  $t$  met punten aanduidende krijgen we dus nu (links wordt altijd naar  $s$  gedifferentieerd!)

$$5.23) \quad \begin{aligned} u^k_1 &= \varphi v^k_1 \\ u^k_2 &= \varphi^2 v^k_2 + \varphi \dot{\varphi} v^k_1 \\ u^k_3 &= \varphi^3 v^k_3 + 3\varphi^2 \dot{\varphi} v^k_2 + (\varphi \ddot{\varphi} + \varphi^2 \ddot{\varphi}) v^k_1 \\ u^k_4 &= \varphi^4 v^k_4 + 6\varphi^3 \dot{\varphi} v^k_3 + (7\varphi^2 \ddot{\varphi} + 4\varphi^3 \ddot{\varphi}) v^k_2 + \\ &\quad + (\varphi \dot{\varphi}^3 + 4\varphi^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \varphi^3 \ddot{\varphi}^2) v^k_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

waaruit we aflezen dat  $u^k_i$  van de orde  $i-1$  in  $\varphi$  is en dus, omdat  $\varphi$  zelf van de orde  $n$  in  $\xi$  is, van de orde  $n+i-1$  in  $\xi^k$ . In het bijzonder is  $u^k_{n+1}$  van de orde  $2n$  in  $\xi^k$ . Hier volgt een tabel van de orden der termen waarin zich de  $u^k$  laten ontbinden.

$$5.24) \quad \begin{array}{ccccccc} & v^k_1 & v^k_2 & v^k_3 & \dots & v^k_{n-2} & v^k_{n-1} & v^k_n \\ u^k_1 & n & - & - & \dots & - & - & - \\ u^k_2 & n+1 & n & - & \dots & - & - & - \\ u^k_3 & n+2 & n+1 & n & \dots & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u^k_{n-1} & 2n-2 & 2n-3 & 2n-4 & \dots & n+1 & n & - \\ u^k_n & 2n-3 & 2n-2 & 2n-3 & \dots & n+1 & n+1 & n \\ u^k_{n+1} & 2n & 2n-1 & 2n-2 & \dots & n+3 & n+2 & n+1 \end{array}$$

Om de orden van  $k_1, \dots, k_{n-1}$  te bepalen berekenen we deze grootheden in (5.16). Ingevolge (5.13) is

$$5.27) \quad k_i = - \frac{[1 \quad \dots \quad u^{n-i-1}_{n-1} \quad u^{n-i}_{n-1} \quad u^{n-i+1}_{n-1} \quad \dots \quad u^n_n]}{u^{n-i-1}_{n-1} \quad u^{n-i}_{n-1} \quad u^{n-i+1}_{n-1}}; \quad i = 1, \dots, n-1$$

In het alternerende product van  $u^k_1, \dots, u^k_{n-i-1}$  treden alleen de volgende termen op: in  $u^k_1$  de term met  $v^k_1$ , in  $u^k_2$  de term met  $v^k_2$ , enz. Deze zijn alle van de orde  $n$ . In  $u^k_{n-i}, u^k_{n-i+1}, \dots, u^k_n$  kunnen nu verder nog termen met  $v^k_{n-i}, \dots, v^k_n$  optreden. Daarvan heeft  $v^k_{n-i}$  in  $u^k_{n-i}$  de hoogste orde, namelijk  $n+i+1$  en daaruit volgt dat  $k_i$  van de orde  $n+i+1$  is. Result.

taast is dus dat we langs de kromme in elk punt een speciaal affien invariant met de kromme verbonden stel van  $n$  vectoren hebben van orden, die ten hoogste  $n, n+1, \dots, 2n-1$  zijn en dat de ten opzichte van deze vectoren berekende "krommingen"  $k_1, \dots, k_{n-1}$  ten hoogste van de orden  $n, n+1, \dots, 2n-1$  zijn.

Men kan nu natuurlijk vragen of het niet mogelijk is stellen van  $n$  vectoren van lagere orde te vinden, die eveneens speciaal affien met de kromme verbonden zijn.

Winternitz heeft bewezen dat voor  $n = 3$

$$5.28) \quad z_1^k = u_1^k; \quad z_2^k = u_2^k; \quad z_3^k = u_3^k + \frac{k}{4} u_1^k$$

een dergelijk stel van de orden 3, 4, 4 is en dat

$$5.29) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} z_1^k &= z_2^k \\ \frac{d}{ds} z_2^k &= k_1 z_1^k + z_3^k \\ \frac{d}{ds} z_3^k &= k_2 z_1^k + 3 k_1 z_2^k \end{aligned}$$

waarin  $k_1 = -\frac{1}{4} k$ ;  $k_2 = \frac{1}{4} \frac{d}{ds} k - k$ . De coëfficiënten  $k_1$  en  $k_2$  zijn nu beide van de vijfde orde <sup>1)</sup>. Het zijn deze coëfficiënten en niet  $k$  en  $k$  die men voor  $n = 3$  bij voorkeur speciaal-affine krommingen noemt.

Laat men de conditie  $\Delta = 1$  vallen, dan blijkt uit (5.14) dat  $ds$  zich transformeert als  $(u_1^{(1)} \dots u_n^{(n)})^{(1)}$ , d.w.z. dat  $ds$  bij transformatie een factor  $\Delta^{(1)}$  krijgt.  $ds$  is dus een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht  $-1/(n+1)$ .

1) Zie voor verdere bijzonderheden Blaschke Vorl. Diff. Geometrie II blz. 76 e.v.

# §6. Invoering van een lineaire overbrenging in een $X_n$

Bij de behandeling van een kromme in  $\bar{F}_n$  en  $\mathcal{E}_n$  zien we dat het hele proces daarop berust dat men in die ruimten een vector parallel kan verplaatsen naar een naburig punt. Ook al gebruiken we kromlijnige coördinaten dan maakt die parallelle verplaatsing het mogelijk de kovariante differentiaal te definiëren als het verschil tussen de naar het naburige punt verschoven veldwaarde en de oorspronkelijke veldwaarde in dat naburige punt. Men zou dus in een  $X_n$  eens een dergelijke parallelle verplaatsing voor iedere richting in ieder punt kunnen gaan voorschrijven. Dit noemt men het voorzien van  $X_n$  van een pseudoparallelle verplaatsing of ook wel een overbrenging (displacement, connexion, Zusammenhang).

Door een dergelijk voorschrift worden naburige locale  $\mathcal{E}_n$ 's die oorspronkelijk in  $X_n$  niets met elkaar te maken hadden tot elkaar in betrekking gebracht (vandaar de namen connexion en Zusammenhang).

Beschouwen we in  $X_n$  eerst een contravariant vectorveld  $v^k$ . Is  $v^k$  de veldwaarde in  $\xi^k$ , dan is  $v^k + dv^k$  de veldwaarde in  $\xi^k + d\xi^k$ . Noem nu volgens het voorschrift pseudoparallel van  $\xi^k$  naar  $\xi^k + d\xi^k$  verplaatste veldwaarde  $v^k + {}^*dv^k$ . In  $\xi^k + d\xi^k$  bestaan nu twee veldwaarden, de oorspronkelijke  $v^k + dv^k$  en  $v^k + {}^*dv^k$ . Het verschil van die twee  $dv^k - {}^*dv^k$  is de covariante differentiaal van  $v^k$ . Inderdaad is dit een vector, immers,  $v^k + {}^*dv^k$  is een vector in  $\xi^k + d\xi^k$  alwaar het veld  $A_{\lambda}^{k'}$  de veldwaarde  $A_{\lambda}^{k'} + dA_{\lambda}^{k'}$  heeft. Bijgevolg is

$$6.1) \quad v^{k'} + {}^*dv^{k'} = (A_{\lambda}^{k'} + dA_{\lambda}^{k'})(v^{\lambda} + {}^*dv^{\lambda}) = A_{\lambda}^{k'} v^{\lambda} + A_{\lambda}^{k'} {}^*dv^{\lambda} + v^{\lambda} dA_{\lambda}^{k'}$$

en dus

$$6.2) \quad {}^*dv^{k'} = A_{\lambda}^{k'} {}^*dv^{\lambda} + v^{\lambda} dA_{\lambda}^{k'}$$

Maar we weten dat

$$6.3) \quad dv^{k'} = d(A_{\lambda}^{k'} v^{\lambda}) = A_{\lambda}^{k'} dv^{\lambda} + v^{\lambda} dA_{\lambda}^{k'}$$

zodat

$$6.4) \quad dv^{k'} - {}^*dv^{k'} = A_{\lambda}^{k'} (dv^{\lambda} - {}^*dv^{\lambda})$$

waaruit het vectorkarakter van  $dv^k - {}^*dv^k$  blijkt. Dit verschil is trouwens niets anders als de differentiaal van  $v^k$  gezien van het standpunt van een waarnemer, wiens coördinatenstelsel pseudoparallel wordt verplaatst.

We bepalen ons nu tot lineaire overbrengingen, d.z. overbrengingen voldoende aan de volgende voorwaarden:

1. Is  $\phi$  een grootheid (indices weggelaten), dan is  $\delta\phi$  een grootheid van hetzelfde soort;
2.  $\delta(\phi + \psi) = \delta\phi + \delta\psi$
3.  $\delta(\phi\psi) = (\delta\phi)\psi + \phi\delta\psi$  (regel van Leibnitz);

4.  $\delta\Phi$  is lineair in  $d\xi^k$
5. de regel van Leibnitz geldt ook voor overschuivingen;
6. is  $\Phi$  een scalar, dan is  $\delta\Phi = d\Phi$

Uit (1), (2), en (4) volgt voor de covariante differentiaal van een contravariante vector  $v^k$

$$6.5) \quad \delta v^k = dv^k + \Gamma_{\mu\lambda}^k v^\lambda d\xi^\mu = (\partial_\mu v^k + \Gamma_{\mu\lambda}^k v^\lambda) d\xi^\mu$$

waarin  $\Gamma_{\mu\lambda}^k$  een geometrisch object met  $n^3$  kentallen is met de transformatiewijze

$$6.6) \quad \Gamma_{\mu'\lambda'}^{k'} = A_{k\mu'}^{k'\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^k - A_{\mu'\lambda'}^{\mu\lambda} \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{k'} = \\ = A_{k\mu'}^{k'\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^k + A_{\mu'}^{\mu\lambda} \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\lambda}$$

Blijkbaar is  $\Gamma_{\mu\lambda}^k$  geen geometrische grootheid

Uit (5) en (6) volgt

$$6.7) \quad d(v^\lambda w_\lambda) = \delta(v^\lambda w_\lambda) = dv^\lambda w_\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\nu w_\lambda + v^\lambda \delta w_\lambda$$

dus

$$6.8) \quad \delta w_\lambda = dw_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^k w_k d\xi^\mu = (\partial_\mu w_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^k w_k) d\xi^\mu$$

en dus ingevolge (3) bijv. voor de affinor

$$6.9) \quad \delta P_{\lambda\nu}^k = (\partial_\mu P_{\lambda\nu}^k + \Gamma_{\mu\rho}^k P_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma P_{\rho\nu}^k - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma P_{\lambda\sigma}^k) d\xi^\mu$$

Voor elke index boven (beneden) treedt een term met positief (negatief) teken op. De uitdrukking tussen haken in (6.5), (6.8) en (6.9) heet de covariante afgeleide en wordt gesymboliseerd door het teken  $\nabla_\mu$

$$6.10) \quad \begin{aligned} \nabla_\mu v^k &= \partial_\mu v^k + \Gamma_{\mu\lambda}^k v^\lambda \\ \nabla_\mu w_\lambda &= \partial_\mu w_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^k w_k \\ \nabla_\mu P_{\lambda\nu}^k &= \partial_\mu P_{\lambda\nu}^k + \Gamma_{\mu\rho}^k P_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma P_{\rho\nu}^k - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma P_{\lambda\sigma}^k \end{aligned}$$

De uitdrukking

$$6.11) \quad \Gamma_\mu^{\text{def}} = \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

transformeert als volgt

$$6.12) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\mu'} &= A_{\mu'}^\mu \Gamma_\mu - A_{\mu'}^{\lambda} \partial_{\mu'} A_{\lambda}^{\mu} \\ &= A_{\mu'}^\mu \Gamma_\mu - \partial_{\mu'} \log \Delta \end{aligned}$$

en is dus eveneens een geometrisch object maar geen grootheid.

Uit de transformatie van een n-vector  $w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  volgt, dat

$$6.13) \quad w_{\mu_1 \dots \mu_n} = A_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = n! A_{\mu_1}^{\lambda_1} \dots A_{\mu_n}^{\lambda_n} w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \Delta^{-1} w_{\mu_1 \dots \mu_n}$$

en het kental  $w_{\mu_1 \dots \mu_n}$  kan dus ook worden opgevat als kental van een

scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht + 1. Nu is

$$6.14) \quad \delta w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = dw_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - n \Gamma_{\mu \lambda}^{\rho} w_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \rho} d\xi^{\mu}$$

en daaruit volgt dat het  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ -kental hiervan is

$$6.15) \quad \delta w_{1 \dots n} = dw_{1 \dots n} - n \Gamma_{\mu}^{\rho} [n w_{1 \dots n-1} \rho] d\xi^{\mu} = dw_{1 \dots n} - \Gamma_{\mu}^{\rho} w_{1 \dots n} d\xi^{\mu}$$

Daarmee hebben we echter de covariante differentiaal van een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht + 1 en dus ingevolge (3) ook die van een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van willekeurig gewicht  $\rho$  gevonden.

$$6.16) \quad \delta \varphi = d\varphi - \rho \Gamma_{\mu}^{\rho} \varphi d\xi^{\mu} = (\partial_{\mu} \varphi - \rho \Gamma_{\mu}^{\rho} \varphi) d\xi^{\mu}$$

Precies een dergelijke formule geldt voor gewone scalaire dichtheden. Hieruit volgt, dat voor een affinor  $\Delta$ -dichtheid of affinor-dichtheid  $\rho^{\cdot \lambda}$  van het gewicht  $\rho$  geldt:

$$\delta \rho^{\cdot \lambda} = (\partial_{\mu} \rho^{\cdot \lambda} + \Gamma_{\mu \rho}^{\sigma} \rho^{\cdot \sigma} - \Gamma_{\mu \lambda}^{\sigma} \rho^{\cdot \sigma} - \rho \Gamma_{\mu}^{\sigma} \rho^{\cdot \lambda}) d\xi^{\mu}$$

Een  $\chi_n$  met een lineaire overbrenging heet  $L_n$ . Is de overbrenging symmetrisch, d.w.z. is de affinor

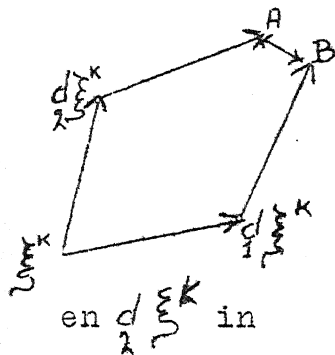
$$S_{\mu \lambda}^{\cdot \cdot \rho} = \Gamma_{\mu \lambda}^{\rho}$$

(controleer dat dit een affinor is!) gelijk nul, dan heet de  $L_n$  een  $A_n$ .

In een  $A_n$  bestaan infinitesimale parallelogrammen in iedere stand. Ga namelijk uit van twee lijnelementen  $d\xi^{\lambda}$  en  $d\xi^{\kappa}$  in hetzelfde punt en verplaats elk pseudo-

parallel langs het andere element

Dan gaat  $d\xi^{\kappa}$  over in



$$d\xi^{\kappa} - d\xi^{\lambda} \Gamma_{\mu \lambda}^{\kappa} d\xi^{\mu}$$

$$d\xi^{\kappa} - d\xi^{\lambda} \Gamma_{\mu \lambda}^{\kappa} d\xi^{\mu}$$

De sluitvector van B naar A is dus juist  $n S_{\mu \lambda}^{\cdot \cdot \rho} d\xi^{\mu} d\xi^{\lambda}$ . We vonden reeds dat de overbrenging in  $E_n$  en  $R_n$ , die bij de aldaar bestaande gewone parallele verplaatsing behoort op kromlijnige coördinaten tot symmetrische  $\Gamma_{\mu \lambda}^{\rho}$  voert. Een  $E_n$  en een  $R_n$  zijn dus speciale gevallen van een  $A_n$ . Eerst later zullen we zien wanneer een  $A_n$  een  $\chi_n$  of een  $R_n$  is.

Men kan in een  $\chi_n$  in plaats van een overbrenging ook andere dingen invoeren, bijv. een maat voor het lijnelement. Doet men dit voor een reëel tensorveld  $g_{\lambda \kappa}$  van de rang  $n$  te geven en de lengte van een lijnelement  $d\xi^{\kappa}$  vast te leggen door de vergelijking

$$6.21) \quad ds = |(g_{\lambda \kappa} d\xi^{\lambda} d\xi^{\kappa})^{1/2}|$$

dan krijgt men een ruimte met een "kwadratische maat" (mit quadratischer Massbestimmung), die  $V_n$  genoemd wordt. Kennelijk is iedere locale  $E_n$  in  $V_n$  een  $R_n$  en is een  $R_n$  een speciaal geval van een  $V_n$ .

$ds$  heet de lengte van  $d\xi^{\kappa}$ . Is de fundamentealtensor indefiniet, dan kan de lengte van een reëel lijnelement nul worden. In de locale  $R_n$  vullen deze lijnelementen de locale nulkegel, die het  $\pm$ -gebied



waar  $g_{\lambda\kappa} d\xi^\lambda d\xi^\kappa > 0$  is scheidt van het -gebied, waar  $g_{\lambda\kappa} d\xi^\lambda d\xi^\kappa < 0$  is. Een kromme in  $V_n$ , die overal aan de locale nulkegel raakt heet een nulkromme. Is de fundamentealtensor definitief, dan komen er geen reële nulkrommen voor (let op dat de tensor  $g_{\lambda\kappa}$  altijd reëel gedacht is).

$g_{\lambda\kappa}$  heet de covariante fundamentealtensor der  $V_n$ . Evenals in  $R_n$  kan  $g_{\lambda\kappa}$  en zijn omkering  $g^{\lambda\kappa}$  (de contravariante fundamentealtensor) worden gebruikt voor het op en neer halen van indices, een proces, dat men liefst alleen toepast op grootheden. Vandaar dat men bij grootheden niet gaarne indices recht boven elkaar zet. Bij algemene objecten bijv.  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  is daartegen geen bezwaar.

Aangezien de locale  $E_n$  in ieder punt van  $V_n$  een  $R_n$  is, geldt alles wat in §3 over lengten en hoeken gezegd is in iedere locale  $R_n$ .

De belangrijkste eigenschap van een  $V_n$  is dat door het veld  $g_{\lambda\kappa}$  automatisch een symmetrische overbrenging  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  is vastgelegd. We behoeven daartoe slechts te eisen dat

$$6.22) \quad \nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$$

en

$$6.23) \quad \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = 0.$$

Uit (6.22) volgt namelijk

$$6.24) \quad \partial_\mu g_{\lambda\kappa} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\kappa} + \Gamma_{\mu\kappa}^\rho g_{\rho\lambda}.$$

Behandelt men deze vergelijking op dezelfde manier als 3.39), dan volgt

$$6.25) \quad \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}).$$

Met behulp van de covariante differentiatie kan een kromme in precies op dezelfde manier worden behandeld als een kromme in  $R_n$ . Alle formules in §4 voor kromlijnige coördinaten in  $R_n$  blijven gelden. Alleen liggen nu natuurlijk de raaklijn, het osculatievlak, de osculerende en de verschillende osculerende bollen steeds in de lokale  $R_n$  van het beschouwde punt. Immers, in  $V_n$  bestaan geen rechte lijnen, vlakke uitgebreidheden of bollen. Is  $K$  overal langs de kromme nul, dan spreken we van een geodetische lijn. De vergelijking luidt

$$6.26) \quad \frac{\delta}{ds} \frac{d\xi^\kappa}{ds} = \frac{d^2 \xi^\kappa}{ds^2} + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d\xi^\lambda}{ds} = 0.$$

Aangezien de tangentiaalvector  $d\xi^\kappa/ds$  zich dus langs de kromme pseudoparallel verplaatst is een geodetische lijn in de meest rechte lijn die in  $V_n$  kan bestaan. Men kan echter aantonen dat in een  $V_n$  de geodetische lijnen tevens extremalen zijn, d.w.z. de meest korte of de meest lange krommen. Dit staat in verband met de begrippen in de volgende § ontwikkeld.

## §7. De afgeleide van Lie en die van Lagrange.

A. De afgeleide van Lie. Stel dat in een gebied van  $X_n$  een eindig reëel veld  $v = v^\mu(\xi)$  gegeven is. De overgang  $\xi^\mu \rightarrow \xi'^\mu, v^\mu dt$  heet dan een infinitesimale punttransformatie. Beschouw nu de differentiaalvergelijking

$$7.1) \quad \frac{d\eta^k}{dt} = \psi^k(\eta^\nu)$$

met de beginvoorwaarden

$$7.2) \quad \eta^k = \xi^k \text{ voor } t=0$$

Wordt de oplossing ontwikkeld in machten van  $t$  dan ontstaat

$$7.3) \quad \eta^k = \xi^k + \psi^k(\xi^\nu) t + \dots$$

en dit stelt  $\infty^1$  eindige punttransformaties voor, die een eenledige (d.i. een groep met 1 parameter; hier  $t$ ) vormen, die naar men zegt door de infinitesimale transformatie  $v^k dt$  wordt voortgebracht (erzeugt). Bij aangroeiing van  $t$  doorloopt ieder punt  $\xi^k$  een stroomlijn van het veld  $v^k$ . De stroomlijnen zijn dus voor de transformaties (7.3) invariant. Maar men lette er alvast op, dat niet iedere punttransformatie, die de stroomlijnen invariant laat, tot de groep (7.3) behoort. Dan zouden er immers meer dan  $\infty^1$  transformaties zijn en bovendien levert  $v^k = \sigma \psi^k$  waarin  $\sigma$  een functie der  $\xi^k$  is, in plaats van  $v^k = \psi^k$  een andere differentiaalvergelijking met andere oplossingen.

Een veld  $v^k$  levert dus stroomlijnen en een bepaalde groep van punttransformaties. Zij nu

$$7.4) \quad \eta^k = f^k(\xi^\lambda)$$

een van die punttransformaties en

$$7.5) \quad \xi^k = \varphi^k(\eta^\lambda)$$

de omkering. We introduceren nu een nieuw coördinatenstelsel  $(\kappa')$  zodanig dat voor ieder punt  $\xi^k$  de coördinaten van het beeldpunt t.o.v.  $(\kappa')$ , dus de  $\eta^{\kappa'}$  numeriek gelijk zijn aan de  $\xi^k$ .

$$7.6) \quad \eta^{\kappa'} = \delta_{\kappa}^{\kappa'} \xi^k = \delta_{\kappa}^{\kappa'} \varphi^k(\eta^\lambda).$$

Daarmede is dan de transformatieformule voor de overgang van  $(\kappa) \rightarrow (\kappa')$  gegeven:

$$7.7) \quad \xi^{\kappa'} = \delta_{\kappa}^{\kappa'} \varphi^k(\xi^\lambda) \quad , \quad \xi^k = f^k(\xi^{\lambda'})$$

Vullen we nu voor  $f^k(\xi^{\lambda'})$  de waarde uit (7.3) in, dan volgt

$$\xi^{\kappa'} = \delta_{\kappa'}^{\kappa} \xi^k + \psi^k(\xi^{\lambda'}) t + \dots$$

7.8)

$$\xi^{\kappa'} = \delta_{\kappa}^{\kappa'} \xi^k - \delta_{\kappa}^{\kappa'} \psi^k(\xi^{\lambda'}) t + \dots$$

Deze overgang van  $(\kappa)$  tot  $(\kappa')$  noemen we het meeslepen van het coördinatenstelsel  $(\kappa)$  door de punttransformaties (7.3). Hiervoor geldt:

$$7.9) \quad A_{\kappa}^{\kappa'} = \delta_{\lambda}^{\kappa'} A_{\kappa}^{\lambda} - t \delta_{\lambda}^{\kappa'} \partial_{\kappa} v^{\lambda} + \dots \quad , \quad A_{\lambda'}^{\kappa} = \delta_{\lambda}^{\kappa} A_{\lambda}^{\kappa} + t \delta_{\lambda}^{\kappa} \partial_{\lambda} v^{\kappa} + \dots$$

Stel nu, dat er enig veld bijv.  $P^{\kappa\lambda}_{1\mu}$  gegeven is in  $X_n$ . Dan vormen we een nieuw veld  $P^{\kappa\lambda}_{1\mu}$ , zodanig dat de kentallen  $P^{\kappa\lambda}_{1\mu}$  in het punt  $\eta^\kappa$  numeriek gelijk zijn aan de kentallen  $P^{\kappa\lambda}_{1\mu}$  in  $\xi^\kappa$ . Dit proces heet het meeslepen van het veld  $P^{\kappa\lambda}_{1\mu}$  door de punttransformatie (7.3):

kentallen meegesleept veld t.o.v. meegesleept coördinatenstelsel =  
= kentallen oud veld t.o.v. oud coördinatenstelsel

Indien mocht blijken, dat  $P^{\kappa\lambda}_{1\mu} = P^{\kappa\lambda}_{1\mu}$  dan verandert het veld niet door het meeslepen en het heet invariant bij de punttransformatie (7.3)

Schrijven we  $dt$  in plaats van  $t$  in (7.8) en laten we de termen van hogere orde weg dan krijgen we het stelsel  $(\kappa')$  dat uit  $(\kappa)$  ontstaat door meeslepen over  $v^\kappa dt$ :

$$\xi^\kappa = \delta^{\kappa}_{\kappa'} \xi^{\kappa'} + v^\kappa dt$$

$$\xi^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_{\kappa} \xi^\kappa - \delta^{\kappa'}_{\kappa} v^\kappa dt$$

We vragen nu naar de kentallen van enig veld  $P^{\kappa\lambda}$  dat over  $v^\kappa dt$  wordt meegesleept. De kentallen van dit veld t.o.v.  $(\kappa')$  in  $\xi^{\kappa'} + v^\kappa dt$  moeten numeriek gelijk zijn aan de kentallen van het gegeven veld in  $\xi^\kappa$ . Bijgevolg zijn de kentallen van dit nieuwe veld in  $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$  t.o.v.  $(\kappa)$  blijkens (7.9)

$$H^{\rho\kappa}_{\lambda\sigma} \cdot \delta^{\rho\sigma}_{\rho'\sigma'} P^{\sigma}_{\rho} = (H^{\rho}_{\lambda} - \partial_{\lambda} v^{\rho} dt)(H^{\kappa}_{\sigma} + \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt) P^{\sigma}_{\rho} =$$

$$= P^{\kappa}_{\lambda} - P^{\kappa}_{\rho} \partial_{\lambda} v^{\rho} dt + P^{\sigma}_{\lambda} \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt$$

Om de kentallen van het nieuwe veld in  $\xi^{\kappa}$  te verkrijgen moeten we er nog  $v^\mu \partial_{\mu} P^{\kappa}_{\lambda} dt$  aftrekken en voor de veldwaarde in  $\xi^{\kappa}$  krijgen we dus voor het meegesleepte veld

$$P^{\kappa}_{\lambda} - v^\mu \partial_{\mu} P^{\kappa}_{\lambda} - P^{\kappa}_{\rho} \partial_{\lambda} v^{\rho} dt + P^{\sigma}_{\lambda} \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt$$

Dit is weer een affinor en daaruit volgt, dat de uitdrukking

$$(v^\mu \partial_{\mu} P^{\kappa}_{\lambda} + P^{\kappa}_{\rho} \partial_{\lambda} v^{\rho} - P^{\sigma}_{\lambda} \partial_{\sigma} v^{\kappa}) dt$$

een affinor is. Deze affinor heet de Lie-differentiaal van het veld  $P^{\kappa}_{\lambda}$  t.o.v. het veld  $v^\kappa dt$ . De affinor

$$\mathbb{L} P^{\kappa}_{\lambda} = v^\mu \partial_{\mu} P^{\kappa}_{\lambda} + P^{\kappa}_{\rho} \partial_{\lambda} v^{\rho} - P^{\sigma}_{\lambda} \partial_{\sigma} v^{\kappa}$$

heet de Lie-afgeleide van  $P^{\kappa}_{\lambda}$  t.o.v. het veld  $v^\kappa$ . Dit is een differentiaalconstante van de twee velden  $P^{\kappa}_{\lambda}$  en  $v^\kappa$ . Men lette er op dat voor iedere index boven (onder) een term optreedt met een negatief (positief) teken. (Net andersom als bij de covarianteafgeleide)

Een veld is dan en alleen dan invariant bij alle transformaties der door de infinitesimale transformaties  $v^\kappa dt$  voortgebrachte groep, indien zijn Lie afgeleide t.o.v.  $v^\kappa$  overal nul is.

Voor de Lie afgeleide geldt:

1. De L.A. van een som is de som der L.A. der termen;
2. De L.A. van een vouwing is de vouwing van de L.A.;

3. De L.A. van een product of overschuiving is onderworpen aan de regel van Leibnitz;
4. De L.A. van  $A_\lambda^K$  en van  $v^K$  zelf is nul;
5. In een  $A_n$  mag men in formules als (7.15) overal (tegelijk!)  $\partial_\mu$  vervangen door  $\nabla_\mu$  (bewijs dit voor het geval 7)

Voorbeelden:

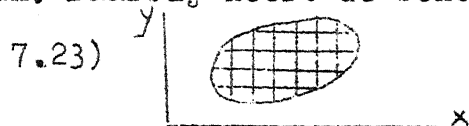
- 7.16) Scalar:  $D_L s = v^\mu \partial_\mu s$
- 7.17) Vectoren: a)  $D_L u^K = v^\mu \partial_\mu u^K - u^\mu \partial_\mu v^K$   
 b)  $D_L w_\lambda = v^\mu \partial_\mu w_\lambda + w_\mu \partial_\lambda v^\mu$
- 7.18) p-vectoren: a)  $D_L u^{K_1 \dots K_p} = v^\mu \partial_\mu u^{K_1 \dots K_p} - p u^{\mu [K_1 \dots K_{p-1}} \partial_\mu v^{K_2 \dots K_p]}$   
 b)  $D_L w_{K_1 \dots K_p} = v^\mu \partial_\mu w_{K_1 \dots K_p} + p w_{\mu [K_1 \dots K_{p-1}} \partial_{K_2 \dots K_p} v^\mu$
- 7.19) n-vector:  $D_L w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \partial_\mu (v^\mu w_{\lambda_1 \dots \lambda_n})$
- 7.20)  $\Delta$ -dichtheid of dichtheid gewicht + 1:  $D_L \eta = \partial_\mu (\eta v^\mu)$
- 7.21) affinor  $\Delta$ -dichtheid of affinordichtheid gewicht  $\neq$ :  
 $D_L \rho^K{}_\lambda = v^\mu \partial_\mu \rho^K{}_\lambda + \rho^K{}_\mu \partial_\lambda v^\mu - \rho^\sigma{}_\lambda \partial_\sigma v^K + \rho \rho^K{}_\lambda \partial_\mu v^\mu$

De formule voor de dichtheid wordt afgeleid uit die van de n-vector op dezelfde wijze als in § 6.

B. De afgeleide van Lagrange. We moeten eerst iets weten over de transformatie van ruimteintegralen bij overgang tot een ander coördinatenstelsel. Neem het eenvoudige geval  $n=2$  en beschouw de integraal

$$7.22) \int_{T_2} f(x,y) dx dy$$

in gewone cartesische coördinaten over een gebied  $T_2$  van het  $x,y$ -vlak. Daarbij hoort de bekende indeling in blokjes



Ga nu bijv. over tot pool coördinaten

$$7.24) \quad \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Aangezien

$$7.25) \quad \begin{aligned} dx &= \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi \\ dy &= \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

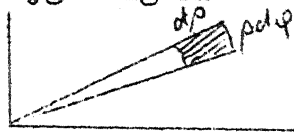
is de functionaaldeterminant gelijk aan  $\rho$ , en de functionaaldeterminant van de omkering  $x,y \rightarrow \rho, \varphi$ , die we  $\Delta$  zullen noemen, gelijk aan  $\rho^{-1}$ . Dezelfde ruimteintegraal kan nu ook in  $\rho$  en  $\varphi$  geschreven worden. Zij

7.26)

$$F(x, y) = G(\rho, \varphi)$$

dan komt er weer een indeling in blokjes en de inhoud van één blokje is  $\rho d\rho d\varphi$ . Bijgevolg is

7.27)



7.28)

$$\int_{\tau_2} F(x, y) dx dy = \int_{\tau_2} \rho G(\rho, \varphi) d\rho d\varphi$$

Daaruit volgt dat bij de overgang  $x, y \rightarrow \rho, \varphi$  de integrand een factor  $\Delta' = \rho$  krijgt. Dat wil zeggen, wil de integraal invariant zijn, dan moet de integrand een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht +1 zijn.

We gaan dit nu algemeen bekijken. Een contravariante  $n$ -vector in  $E_n$  stelt een ruimte-deel met een schroefzin voor. Een infinitesimaal ruimteteel in  $X_n$  is dus, met de schroefzin die daaraan wordt toegevoegd door de natuurlijke volgorde der coördinaten, een contravariante  $n$ -vector. Schrijven we daarvoor  $df^{k_1 \dots k_n}$  dan kan de integraal

7.29)

$$\int_{\tau_n} \tilde{\sigma} df^{k_1 \dots k_n}$$

alleen invariant zijn wanneer  $\tilde{\sigma}$  een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht +1 is. Want optelling van grootheden in verschillende punten is in  $X_n$  alleen mogelijk voor scalaires en voor  $n$ -vector  $\Delta$ -dichtheden van het gewicht +1. Het kental  $df^{1 \dots n}$  kan zoals we vroeger zagen ook worden opgevat als kental van een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht -1, zodat zich dezelfde integraal ook laat schrijven

7.30)

$$\int_{\tau_n} \tilde{\sigma} d\tilde{f}$$

waarin  $d\tilde{f}$  die  $\Delta$ -dichtheid voorstelt. (7.29) stelt voor de limiet van een optelling van  $n$ -vector  $\Delta$ -dichtheid  $n$  in verschillende punten en (7.30) de limiet van een optelling van scalaires.

Iedere  $n$ -vector laat zich schrijven als alternerend product van  $n$  vectoren. Zij dus

7.31)

$$df^{k_1 \dots k_n} = n! d\xi^{[k_1} \dots d\xi^{k_n]}$$

waarin  $d\xi^k, \dots, d\xi^k$  willekeurig gekozen lijnelementen zijn. Kieser we nu de lijnelementen zo dat

7.32)

$$\begin{aligned} d\xi^1 &= d\xi^1 & ; & & d\xi^2 &= 0 & ; & \dots & ; & d\xi^n &= 0 \\ d\xi^2 &= 0 & ; & & d\xi^3 &= d\xi^2 & ; & \dots & ; & d\xi^n &= 0 \\ & \dots & & & \dots & & & & & & \\ d\xi^n &= 0 & ; & & d\xi^n &= 0 & ; & \dots & ; & d\xi^n &= d\xi^n \end{aligned}$$

wat daarop neerkomt dat we de lijnelementen net langs de coördinaten krommen van het stelsel  $(K)$  leggen, dan gaat (7.31) over in

$$7.33) \quad f^{1\dots n} = d\xi^1, \dots, d\xi^n.$$

en de integraal krijgt de vorm

$$7.34) \quad \int_{T_n} \tilde{f} d\xi^1, \dots, d\xi^n.$$

behorende bij de blokjesindeling gegeven door het coördinatenstelsel

$(K)$  We gebruiken in het volgende een stelling over ruimteintegralen afkomstig van Stokes (ook genoemd naar Gauss en Ostrogradski). Is  $\tilde{\eta}^K$  een contravariante vector  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht +1, dan kan men bewijzen dat  $\partial_\mu \tilde{\eta}^\mu$  een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van hetzelfde gewicht is. Nu is een elementje van de begrenzende  $T_{n-1}$  van  $T_n$  een contravariante  $(n-1)$ -vector, die zich ook laat opvatten als een covariante vector  $\Delta$ -dichtheid  $\tilde{f}_\lambda$  van het gewicht -1. De stelling van Stokes zegt nu dat wanneer een aantal voorwaarden ten aanzien van het veld  $\tilde{\eta}^K$  en de begrenzing  $T_{n-1}$  vervuld zijn, de identiteit

$$7.35) \quad \int_{T_n} \partial_\mu \tilde{\eta}^\mu d\tilde{f} = \int_{T_{n-1}} \tilde{\eta}^\lambda d\tilde{f}_\lambda$$

geldt, die de ruimteintegraal omzet in een integraal over de begrenzing.

Opmerking verdient dat deze identiteit steeds geldt wanneer maar  $\tilde{\eta}^K$  en de begrenzing aan zeker analytische voorwaarden voldoen. Het doet er niets toe of  $\tilde{\eta}^K$  zich werkelijk als vector- $\Delta$ -dichtheid transformeert. Alleen zijn de twee integralen dan niet meer invariant, wat ons helemal niet kan schelen, bijv. wanneer wij niet van plan zijn andere coördinaten te gaan invoeren.

Om nu de afgeleide van Lagrange te definiëren maken we de volgende onderstellingen. Zij  $\Phi_\Lambda$ ;  $\Lambda=1, \dots, N$  een stel functies van de  $\xi^r$  en laten  $\Phi_{\Lambda,\mu}$ ,  $\Phi_{\Lambda,\nu,\mu}$ , ... staan voor  $\partial_\mu \Phi_\Lambda$ ,  $\partial_\nu \partial_\mu \Phi_\Lambda$ , enz. Laten deze functies gedefinieerd zijn in enig gebied van  $X_n$  en aldaar continue afgeleiden hebben tot een zeker orde.

Stel vervolgens dat  $\mathcal{L}$  een functie is van de  $\Phi_\Lambda$  en hun afgeleiden tot een bepaald gegeven eindige orde. Dan is  $\mathcal{L}$  via de  $\Phi_\Lambda$  en hun afgeleiden tenslotte een functie der  $\xi^K$  die in enig gebied der  $X_n$  wel gedefinieerd is.

Laat ten slotte in dit gebied  $T_n$  een bepaald gebied zijn dat door een  $(n-1)$ -dimensionaal gebied  $T_{n-1}$  begrensd wordt en laat er een continue punttransformatie bestaan zodanig dat de vergelijking van  $T_{n-1}$  ten opzichte van enig toegelaten coördinatenstelsel in  $X_n$  de vorm aanneemt van de vergelijking van een hyperbol. Dit alles om "rare" vormen van  $T_n$  uit te sluiten.

We beschouwen nu de integraal over  $\tau_n$ :

$$7.36) \quad \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n$$

en nemen aan dat deze integratie werkelijk uitvoerbaar is en een eindige waarde oplevert.

De  $\Phi_\Lambda$  mogen nu variaties  $\delta \Phi_\Lambda$  ondergaan en wel zo dat de variaties van  $\Phi_\Lambda$  en van alle in  $\mathcal{L}$  werkelijk voorkomende afgeleiden daarbij nul zijn op  $\tau_{n-1}$ . Dan geldt voor de variatie van  $\mathcal{L}$ :

$$7.37) \quad \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} \delta \Phi_\mu + \dots$$

waarbij wij de indices  $\Lambda$  voor het gemak overal weggelaten hebben ( $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi$  staat dus voor een som van  $N$  termen, de volgende term voor een som van  $nN$  termen, enz.). Uit (7.37) volgt dat

$$7.38) \quad \delta \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n = \int_{\tau_n} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} \delta \Phi_\mu + \dots \right) d\xi^1 \dots d\xi^n$$

en door partiële integratie verkrijgen we hieruit

$$7.39) \quad \delta \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n = \int_{\tau_n} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu\nu}} - \dots \right) \delta \Phi d\xi^1 \dots d\xi^n + \int_{\tau_n} \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} \delta \Phi \right) + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu\nu}} \delta \Phi_\nu \right) - \partial_\mu \left( \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu\nu}} \delta \Phi \right) \right) + \dots \right] d\xi^1 \dots d\xi^n$$

de tweede integraal van de vorm

$$7.40) \quad \int_{\tau_n} \partial_\mu P^\mu d\xi^1 \dots d\xi^n,$$

is volgens het theorema van Stokes kan deze integraal worden omgezet in een integraal van  $P^\mu$  over de begrenzing  $\tau_{n-1}$ . Daar echter iedere term van  $P^\mu$  op  $\tau_{n-1}$  nul is, omdat aldaar immers  $\delta \Phi$ ,  $\delta \Phi_\mu$ , enz. alle nul zijn, is de integraal (7.40) identiek nul.

Hieruit volgt

$$7.41) \quad \delta \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n = \int_{\tau_n} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu\nu}} - \dots \right) \delta \Phi d\xi^1 \dots d\xi^n$$

De uitdrukking

$$7.42) \quad [\mathcal{L}]^\Lambda = \det \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\Lambda} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\Lambda\mu}} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\Lambda\mu\nu}} - \dots$$

waarin de indices  $\Lambda$  nu weer ingevoerd zijn, heet de Lagrange-afgeleide van  $\mathcal{L}$  ten opzichte van  $\Phi_\Lambda$ .

Is  $[\mathcal{L}]^\Lambda = 0$ , dan is de variatie links in (7.41) nul voor iedere

keuze der variatie  $\delta \Phi_A$  en daarmee is dan de eerste voorwaarde vervuld het extreem worden van de integraal (7.36) over  $T_m$ .

De vergelijking  $[\mathcal{L}]^A = 0$  heet de vergelijking van Lagrange in de niet-invariante vorm. We hebben immers over de transformatie van  $\mathcal{L}$  niet gesproken en ook geen coördinaten getransformeerd. In deze vorm treedt de vergelijking bij voorbeeld op in de klassieke mechanica. De  $\xi^k$  reduceren zich daar tot één variabele  $t$  en  $t$  wordt niet getransformeerd.  $\mathcal{L}$  is dan in het eenvoudigste geval een functie van de zogenaamde noodzakelijke coördinaten  $q^\sigma$ ;  $\sigma = 1, \dots, N$  van het stelsel en hun eerste afgeleiden naar  $\dot{q}^\sigma$  en de vergelijking luidt

$$7.42) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\sigma} = 0, \quad \dot{q}^\sigma = \det \frac{dq^\sigma}{dt}; \quad \sigma = 1, \dots, N.$$

en vormt de eerste voorwaarde voor het extreem worden van de integraal  $\int \mathcal{L} dt$

Het komt veel voor dat de  $\delta \Phi_A$  kentallen zijn van een grootheid in  $X_n$  of ook van een verbindingsgrootheid tussen  $X_n$  en een andere ruimte. Uit het invariant zijn van de integraal

$$7.43) \quad \int [\mathcal{L}]^A \delta \Phi_A d\xi^1 \dots d\xi^n$$

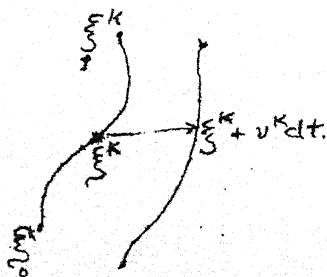
volgt nu dat  $[\mathcal{L}]^A \delta \Phi_A$  een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht  $+\Delta$  in moet zijn voor iedere waarde van de variatie  $\delta \Phi_A$ . Is dus  $\delta \Phi_A$  een grootheid in  $X_n$  of een verbindingsgrootheid dan volgt dat  $[\mathcal{L}]^A$  evenzeer een grootheid in  $X_n$  resp. een verbindingsgrootheid is en dat geldt:

|               |                   |                                                   |                 |         |
|---------------|-------------------|---------------------------------------------------|-----------------|---------|
| cov. valentie | $[\mathcal{L}]^A$ | in $X_n$ en in de andere ruimte = contr. valentie | $\delta \Phi_A$ | aldaar  |
| contr. "      | $[\mathcal{L}]^A$ | " " " " " " " "                                   | "               | "       |
| gewicht       | $[\mathcal{L}]^A$ | in $X_n$ = 1 minus gewicht                        | $\delta \Phi_A$ | aldaar. |
| gewicht       | $[\mathcal{L}]^A$ | in de andere ruimte = - gewicht                   | $\delta \Phi_A$ | aldaar. |

### 8. Krommen van extreme lengte in $V_n$ :

We gaan nu op twee verschillende manieren bewijzen dat de geodetische lijnen in  $V_n$  althans aan de eerste voorwaarde voor het extreem zijn van hun lengte voldoen. Eerst gebruiken we de afgeleide van Lie.

Laat een kromme tussen de punten  $\xi^k$  en  $\xi^k$  gegeven zijn en verder een willekeurig veld  $v^k$ . Worden dan de punten over  $v^k dt$  verplaatst dan ontstaat een nieuwe kromme en het algemene punt  $\xi^k$  komt in  $\xi^k + v^k dt$ . We willen nu de lengte van de oorspronke-





lijke en de verplaatste kromme vergelijken. Om dat handig te doen breiden we het veld  $v^k$ , dat oorspronkelijk alleen op de kromme gegeven was, op de aan of andere manier continu uit over de gehele omgeving der krommen. Dan slepen we de tweede kromme met het veld  $g_{\lambda k}$  terug over  $-v^k dt$ . Dan hebben we maar één kromme, waarvan de lengte gemeten moet worden eerst met behulp van het oude veld  $g_{\lambda k}$  en daarna met het over  $-v^k dt$  terugsleepte veld  $g_{\lambda k}$ . Maar dat teruggesleepte veld heeft zoals we gezien hebben de veldwaarde

(Let op het + - teken vanwege het - - teken in  $-v^k dt$ ).

$$8.1) \quad g_{\lambda k} + \mathbb{D} g_{\lambda k} dt.$$

waarin  $\mathbb{D} g_{\lambda k}$  de afgeleide van Lie is van  $g_{\lambda k}$  ten opzichte van het veld  $v^k$ . Dus is

$$8.2) \quad g_{\lambda k} + \mathbb{D} g_{\lambda k} dt = g_{\lambda k} + (v^\lambda \partial_\lambda g_{\lambda k} + g_{\lambda \sigma} \partial_\lambda v^\sigma + g_{\lambda \sigma} \partial_\sigma v^\lambda) dt.$$

of ook, aangezien we  $\partial_\lambda$  door  $\nabla_\lambda$  mogen vervangen en  $\nabla_\lambda g_{\lambda k} = 0$  is,

$$8.3) \quad g_{\lambda k} + \mathbb{D} g_{\lambda k} dt = g_{\lambda k} + 2 \nabla_{(\lambda} v_{k)} dt;$$

variatie van  $g_{\lambda k}$  is dus:

$$8.4) \quad \delta g_{\lambda k} = 2 \nabla_{(\lambda} v_{k)} dt.$$

en de variatie van  $ds$  is diensgevolge, als  $\tau$  een willekeurige parameter op de kromme is,

$$8.5) \quad \begin{aligned} \delta ds &= \delta \left( g_{\lambda k} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \frac{d\xi^k}{d\tau} \right)^{1/2} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \frac{d\tau}{ds} \cdot 2 (\nabla_{(\lambda} v_{k)}) \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \frac{d\xi^k}{d\tau} d\tau dt \\ &= (\nabla_\lambda v_k) \frac{d\xi^\lambda}{ds} \frac{d\xi^k}{ds} ds dt = \frac{dv_k}{ds} \frac{d\xi^k}{ds} ds dt. \end{aligned}$$

De variatie van de lengte is dus

$$8.6) \quad \delta \int_{\xi_0^k}^{\xi^k} ds = dt \int \frac{dv_k}{ds} d\xi^k =$$

$$= dt \left\{ \left( v_\lambda \frac{d\xi^\lambda}{ds} \right)_{\xi^k=\xi_0^k} - \left( v_\lambda \frac{d\xi^\lambda}{ds} \right)_{\xi^k=\xi^k} \right\} - dt \int v_\lambda \delta \frac{d\xi^\lambda}{ds}$$

Indien nu  $v^k=0$  is in  $\xi_0^k$  en in  $\xi^k$ ; dan volgt dat de variatie van  $\int ds$  dan en alleen dan voor iedere keuze van  $v^k$  nul is indien  $\delta \frac{d\xi^\lambda}{ds} = 0$  is, d.w.z. indien de kromme een geodetische lijn is.

Nu gaan we de methode van Lagrange gebruiken, maar stellen daarbij tegelijk de vraag iets ruimer. Laat aan elk lijnelement in een  $X_n$  een "lengte" toegekend zijn met behulp van de formule

$$8.7) \quad \text{lengte } d\xi^k = F(\xi^k, \frac{d\xi^k}{dt}) dt$$

waarin  $t$  een willekeurige parameter is op een kromme  $\xi^k = f^k(t)$  waarvan  $d\xi^k$  lijnelement is en waarbij we onderstellen dat  $F$  homogeen van de eerste gradis in  $d\xi^k/dt$ ; dat laatste om te maken dat de lengte van  $\rho d\xi^k$   $\rho$  maal de lengte van  $d\xi^k$  is. Voeren we een andere parameter  $t'$  in op de kromme dan is de lengte vanwege deze homogeniteit evenzeer te schrijven

$$8.8) \quad F(\xi^k, \frac{d\xi^k}{dt'}) dt'$$

Schrijven we dus voor de lengte

$$8.9) \quad h[t] dt = h[t'] dt'$$

dan blijkt  $h$  in de eendimensionale ruimte met coördinaat  $t$  of  $t'$  een scalaire  $\Delta$ -dichtheid van het gewicht +1 te zijn. In diezelfde eendimensionale ruimte moeten de  $\xi^k$  worden opgevat als scalaren omdat zij immers bij de transformatie  $t \rightarrow t'$  niet veranderen. We stellen nu de vraag wanneer de "lengte" van de kromme tussen twee vaste punten  $t = t_0$  en  $t = t_1$  extreem is. Daartoe vatten we  $h$  op als een functie van de  $\xi^k$  en hun eerste afgeleiden naar  $t$ . Maar dit probleem behandelden we algemeen in § 7. De  $\Phi_A$  worden nu de  $n$  scalaren  $\xi^k$  en voor de afgeleide van Lagrange van  $h$  vinden we blijkens (7.42)

$$8.10) \quad [h]_\lambda = \frac{\partial h}{\partial \xi^\lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial (\frac{d\xi^\lambda}{dt})}$$

In de  $X_n$  zijn de  $[h]_\lambda$  scalaire dichtheden van het gewicht +1. Daar  $d\xi^k$  een contravariante vector in  $X_n$  is moet  $[h]_\lambda$  zich bij coördinatentransformaties in  $X_n$  als een covariante vector transformeren. (Zie § 7). We controleren dit nog eens. Bij de transformatie  $(k) \rightarrow (k')$  is, als we voor het gemak schrijven  $\dot{\xi}^k$  voor  $\frac{d\xi^k}{dt}$ :

$$8.11) \quad \xi^{k'} = \xi^{k'}(\xi^k) \\ \dot{\xi}^{k'} = A^{k'}_{\kappa}(\xi^\nu) \dot{\xi}^\kappa$$

en daaruit volgt dat

$$8.12) \quad \frac{\partial h}{\partial \xi^\lambda} = \frac{\partial h}{\partial \xi^{\lambda'}} A^{\lambda'}_{\lambda} + \frac{\partial h}{\partial \dot{\xi}^{\lambda'}} (\partial_\lambda A^{k'}_{\kappa}) \dot{\xi}^\kappa.$$

$$\begin{aligned}
 8.13) \quad -\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}^\lambda} &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \xi^{\mu'}} \frac{\partial \xi^{\mu'}}{\partial \dot{\xi}^\lambda} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}^{\kappa'}} \frac{\partial \dot{\xi}^{\kappa'}}{\partial \dot{\xi}^\lambda} \right) = \\
 &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}^{\kappa'}} H_{\lambda}^{\kappa'} \right) = \\
 &= -H_{\lambda}^{\lambda'} \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}^{\lambda'}} - \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}^{\lambda'}} (\partial_{\kappa} H_{\lambda}^{\kappa'}) \dot{\xi}^{\kappa}
 \end{aligned}$$

en bij optelling, aangezien  $\partial_{[\lambda} H_{\kappa]}^{\kappa'} = 0$ .

$$8.14) \quad \frac{\partial R}{\partial \xi^\lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}^\lambda} = H_{\lambda}^{\lambda'} \left( \frac{\partial R}{\partial \xi^{\lambda'}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}^{\lambda'}} \right)$$

Het blijkt dus dat  $[R]_\lambda$  in de  $X_n$  een covariante vector is die echter tegelijk in de  $X_1$  een  $\delta$ -dichtheid van het gewicht +1 is.  $[R]_\lambda$  is dus een voorbeeld van een verbindingsgrootheid. (Verg. § 3).

De "vector"  $[R]_\lambda$  heet de Eulerse vector van de kromme met betrekking tot het bij  $R dt$  behorende variatieprobleem. Gaat men niet tot verandering van de parameter  $t$  over, dan is  $[R]_\lambda$  werkelijk een vector. De eerste voorwaarde voor extremiteit is dat de Eulerse vector langs de kromme nul is.

We gaan dit nu toepassen op het reeds boven behandelde speciale geval dat

$$8.15) \quad R = (g_{\mu\lambda} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\lambda)^{1/2} = \frac{ds}{dt}$$

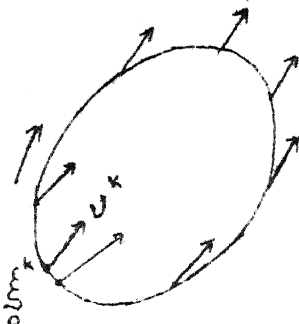
in een  $V_n$ . Dan is (let op  $\frac{ds}{ds} = \int_1^{\dot{\xi}^\kappa} =$  rakende eenheidsvector, zie §1)

$$\begin{aligned}
 8.16) \quad \frac{\partial R}{\partial \xi^\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}^\nu} &= \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} (\partial_\nu g_{\mu\lambda}) \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\lambda - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} \cdot 2 g_{\mu\nu} \dot{\xi}^\mu \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} (\partial_\nu g_{\mu\lambda}) \int_1^{\dot{\xi}^\mu} \int_1^{\dot{\xi}^\lambda} - \frac{ds}{dt} (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \int_1^{\dot{\xi}^\mu} \int_1^{\dot{\xi}^\lambda} - \frac{ds}{dt} g_{\nu\kappa} \frac{d^2 \xi^\kappa}{ds^2} = \\
 &= -\frac{ds}{dt} \left\{ g_{\nu\kappa} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \int_1^{\dot{\xi}^\mu} \int_1^{\dot{\xi}^\lambda} + g_{\nu\kappa} \frac{d}{ds} \int_1^{\dot{\xi}^\kappa} \right\} = \\
 &= -\frac{ds}{dt} g_{\nu\kappa} \frac{d}{ds} \int_1^{\dot{\xi}^\kappa} = -\frac{ds}{dt} \kappa_{\frac{1}{2}}^{\kappa} \dot{\xi}_\nu
 \end{aligned}$$

en het blijkt dat de Eulerse vector hier de vector  $-\kappa_{\frac{1}{2}}^{\kappa} \dot{\xi}_\nu$  van de  $V_n$  is vermenigvuldigd met een factor  $\frac{ds}{dt}$ , die verandert wanneer  $t$  door een andere parameter vervangen wordt en die 1 is wanneer men  $t = s$  kiest.

## § 9. Kromming

Beschouw <sup>in</sup> een punt  $\xi^k$  van een  $\mathcal{L}_n$  een infinitesimaal vlak-elementje  $df^{k\lambda}$  en een vector  $v^k$  (of  $w_\lambda$ ).



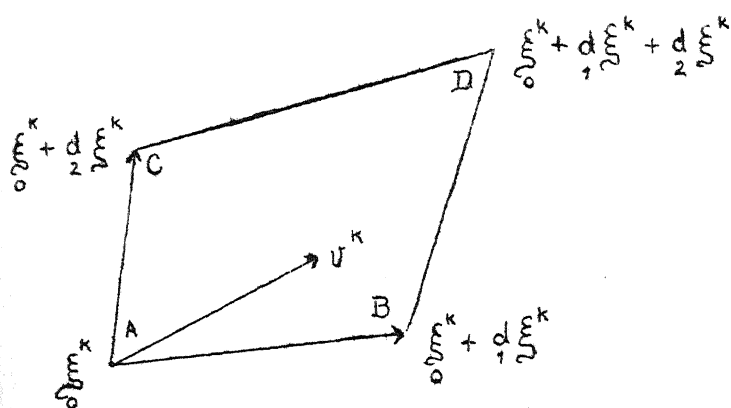
Verplaats vervolgens  $v^k$  pseudoparallel langs de rand van  $df^{k\lambda}$ . De eindstand in  $\xi^k$  zal in het algemeen van  $v^k$  verschillen. Men kan bewijzen dat het verschil tussen eindstand en beginstand is

$$9.1) \quad -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} v^\lambda df^{\nu\mu} + \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} w_k df^{\nu\mu}$$

waarin  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k}$  een affinor is gedefinieerd door

$$9.2) \quad R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} = 2 \partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]}^k{}_\lambda + 2 \Gamma_{[\nu}^k{}_{\rho} \Gamma_{\mu]}^\rho{}_\lambda$$

Het strenge bewijs vereist zeer zorgvuldige overwegingen. De volgende redenering dient alleen ter illustratie



In nevenstaande vierhoek verplaatst men eerst  $v^k$  van A naar B via C; Aangezien  $\delta v^k$  altijd nul moet zijn, komt er in B een vector

$$9.3) \quad v^k - \Gamma_{\mu\lambda}^k v^\lambda d_1^{\xi^\mu}$$

Van B naar D moeten we gebruik maken van de waarde van  $\Gamma_{\mu\lambda}^k$  ter plaatse B, dat is

$$\Gamma_{\mu\lambda}^k + d_1^{\xi^\nu} \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^k \quad . \text{ Bijgevolg is de vector in D}$$

$$9.4) \quad v^k - \Gamma_{\mu\lambda}^k v^\lambda d_1^{\xi^\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^k (v^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda v^\rho d_1^{\xi^\mu}) d_2^{\xi^\nu} - (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^k) v^\lambda d_1^{\xi^\mu} d_2^{\xi^\nu}$$

waarbij alle termen van een orde groter dan twee verwaarloosd zijn. Verplaatst men via C dan komt er in D de vector die ontstaat door verwisseling van  $d_1$  en  $d_2$ . Het verschil is dus

$$9.5) \quad -(2 \partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]}^k{}_\lambda - 2 \Gamma_{[\nu}^k{}_{\rho} \Gamma_{\mu]}^\rho{}_\lambda) v^\lambda d_1^{\xi^\mu} d_2^{\xi^\nu} = -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} v^\lambda df^{\nu\mu}$$

dat hier  $df^{\nu\mu} = 2 d_1^{\xi^\nu} d_2^{\xi^\mu}$ . Dit verschil is een vector en

dat de vergelijking moet gelden voor iedere keuze van  $v^k$  en  $df^{\nu\mu}$  volgt dat  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k}$  een affinor moet zijn.

Is  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} = 0$  dan heet de overbrenging inte grabel. Is  $S_{\mu\lambda}^{\dots k} = 0$  d.w.z.

de  $\mathcal{L}_n$  een  $A_n$ , dan volgt voor  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} = 0$  dat de  $A_n$  een  $\mathcal{E}_n$  is. Om dit

bewijzen gaan we uit van  $n$  lineair onafhankelijk covariante vectoren

in enig punt  $\xi^k$ . Men verplaatst deze pseudoparallel naar alle punten

in een  $\mathcal{U}(\xi^k)$ . Langs welke weg doet er niet toe aangezien rondvoering

altijd wegens  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} = 0$  weer tot de oorspronkelijke vector terugvoert. Zo verkrijgt men covariante vectorvelden waarvan de covariante differentiaal in alle richtingen nul zijn. Is  $w_\lambda$  een dergelijk veld dan is dus  $\nabla_\mu w_\lambda$  overal nul. Dus is ook  $\nabla_{[\mu} w_{\lambda]} = 0$  en omdat  $S_{\mu\lambda}^{\dots k} = 0$  is, volgt hieruit dat  $\partial_{[\mu} w_{\lambda]} = 0$ . Er is dus een scalar  $S$  zodanig dat

$w_\lambda = \partial_\lambda S$ . Noemde aldus verkregen  $n$  scalarvelden  $\xi^k$ ;  $k = 1, \dots, n$  dan zijn deze functies van  $\xi^k$  onafhankelijk omdat hun gradienten lineair onafhankelijk zijn. Zij kunnen als nieuwe coördinaten worden ingevoerd. De bijbehorende covariante maatvectoren  $\hat{e}_\lambda, \dots, \hat{e}_\lambda$  zijn zoals het behoort gradienten. Nu is

$$9.6) \quad 0 = \nabla_\mu \hat{e}_\lambda^k \quad \text{of} \quad 0 = \nabla_j \hat{e}_i^k = -\Gamma_{ji}^k$$

en daaruit volgt dat we werkelijk een coördinatenstelsel verkregen hebben waarvoor de  $\Gamma_{ji}^k$  nul zijn en dat dus als rechtlijnig coördinatenstelsel in een  $E_n$  mag worden opgevat.

$R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k}$  heet de kromtegrootheid van de  $\mathcal{L}_n$ . Deze grootheid treedt ook op wanneer men tweemaal covariant differentieert en alterneert. Door uitschrijven bewijst men dat

$$9.7) \quad \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} v^k = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} v^\lambda - S_{\nu\mu}^{\dots p} \nabla_p v^k$$

$$9.8) \quad \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} w_\lambda = -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} w_k - S_{\nu\mu}^{\dots p} \nabla_p w_\lambda$$

Nu heeft de operator  $\nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]}$  de merkwaardige eigenschap dat bij toepassing op producten de regel van Leibniz geldt. Inderdaad (indices weggelaten):

$$9.9) \quad \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} \phi \psi = \nabla_{[\nu} (\nabla_{\mu]} \phi) \psi + \nabla_{[\nu} \phi \nabla_{\mu]} \psi =$$

$$(\nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} \phi) \psi + (\nabla_{[\mu} \phi) \nabla_{\nu]} \psi + (\nabla_{[\nu} \phi) \nabla_{\mu]} \psi + \phi \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} \psi =$$

(Afspraak: de differentierende werking van  $\nabla$  strekt zich altijd uit tot de eerstvolgende sluitende haak waarvan de bijbehorende openende haak vóór  $\nabla$  staat. Dit spaart haken).

Deze regel geeft nu direct het resultaat van  $\nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]}$  op een affinor, bijv.

$$9.10) \quad \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} P^{\dots \kappa \lambda} \omega = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\rho}^{\dots \kappa} P^{\rho \lambda} \omega + \frac{1}{2} R_{\nu\mu\rho}^{\dots \lambda} P^{\dots \kappa \rho} \omega - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\omega}^{\dots \sigma} P^{\dots \kappa \lambda} \omega - S_{\nu\mu}^{\dots p} \nabla_p P^{\dots \kappa \lambda} \omega$$

Is  $\phi$  een dichtheid van het gewicht + 1, dan is

$$\nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} \phi = \nabla_{[\nu} (\partial_{\mu]} \phi - \phi \Gamma_{\mu]}^{\lambda})$$

$$9.11) \quad \begin{aligned} &= \partial_{[\nu} \partial_{\mu]} \phi - (\partial_{[\nu} \phi) \Gamma_{\mu]}^{\lambda} - \phi \partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]}^{\lambda} \\ &- \Gamma_{[\nu\mu]}^{\lambda} \partial_\lambda \phi + \phi \Gamma_{[\nu\mu]}^{\lambda} \Gamma_\lambda^{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\Gamma_{\nu} \partial_{\mu} \beta + \beta \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} \\
 & = -\beta \partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]} - S_{\nu\mu}^{\lambda} \partial_{\lambda} \beta
 \end{aligned}$$

waaruit volgt dat  $\partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]}$  een bivector is (hoewel  $\Gamma_{\lambda}$  geen vector is. Overigens blijkt dit ook uit

$$9.12) \quad \mathcal{V}_{\nu\mu} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\lambda} = 2 \partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]} + 2 \Gamma_{[\nu} \Gamma_{\mu]}^{\lambda} = 2 \partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]}$$

Voor gebruikmakende van de regel van Leibniz voor  $\nabla_{\nu} \nabla_{\mu}$  vindt men voor een affinordichtheid  $\phi^{\cdot\lambda}$  van het gewicht  $\kappa$

$$9.13) \quad \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} \phi^{\cdot\lambda} = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\rho}^{\dots\kappa} \phi^{\rho\cdot\lambda} - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\sigma} \phi^{\cdot\sigma} - S_{\nu\mu}^{\rho} \nabla_{\rho} \phi^{\cdot\lambda} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\nu\mu} \phi^{\cdot\lambda}$$

$\mathcal{V}_{\nu\mu}$  heeft een mooie meetkundige betekenis. Voert men een  $n$ -vector  $v^{k_1 \dots k_n}$  rond langs een vlak elementje dan is het verschil tussen begin en eindstand (omdat de  $n$ -vector zich als alternerend product van  $n$  vectoren laat schrijven

$$(-\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa_1} v^{k_2 \dots k_n} - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa_2} v^{k_1 \lambda k_3 \dots k_n} - \text{enz.}) f^{\nu\mu} d\sigma$$

$$9.14) = -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots[k_n} v^{k_1 \dots k_{n-1]} \lambda} f^{\nu\mu} d\sigma$$

$$= -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\lambda} v^{k_1 \dots k_n} f^{\nu\mu} d\sigma = -\frac{1}{2} \mathcal{V}_{\nu\mu} v^{k_1 \dots k_n} f^{\nu\mu} d\sigma$$

Hieruit volgt dat de overbrenging integrabel is voor  $n$ -vectoren indien en slechts indien  $\mathcal{V}_{\nu\mu} = 0$  is. Men noemt een dergelijke overbrenging volumegetrouw.

De kromtegrootheid voldoet aan enige identiteiten, die hier alleen voor het geval van de  $A_n$  worden opgeschreven (Voor de  $\mathcal{L}_n$  komen er correctietermen met  $S_{\mu\lambda}^{\dots\kappa}$ )

Eerste identiteit:

$$9.15) \quad \text{I) } \boxed{R_{(\nu\mu)\lambda}^{\dots\kappa} = 0}$$

volgt direct uit de definitie (9.2)

Tweede identiteit

$$9.16) \quad \text{II) } \boxed{R_{[\nu\mu\lambda]}^{\dots\kappa} = 0}$$

volgt eveneens direct uit (9.2) wegens  $\Gamma_{[\mu\lambda]}^{\kappa} = 0$

Bij vouwing over  $\kappa\lambda$  volgt als  $R_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$

$$9.17) \quad \boxed{V_{\mu\lambda} = -2 R_{[\mu\lambda]}}$$

De volgende identiteiten gelden alleen in een  $V_n$ . Men schrijft daar  $\mathcal{R}_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$  in plaats van  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$ . Aldaar is dan

$$9.18) \quad 0 = \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} g_{\lambda\kappa} = -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\quad\sigma} g_{\sigma\kappa} - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\kappa}^{\quad\sigma} g_{\lambda\sigma}$$

of, bekend als derde identiteit

$$9.19) \quad \text{III)} \quad \boxed{R_{\nu\mu(\lambda\kappa)} = 0}$$

Uit de drie eerste identiteiten volgt eenvoudig de 4<sup>e</sup> identiteit

$$9.20) \quad \text{IV)} \quad \boxed{R_{\nu\mu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\nu\mu}}$$

en uit de tweede, derde en vierde identiteit volgt nog dat deze samen equivalent zijn met de derde en vierde, tezamen met

$$9.21) \quad \text{II')} \quad \boxed{R_{[\nu\mu\lambda\kappa]} = 0}$$

Samenvatting:

$$\begin{aligned} 9.22) \quad & \text{I)} \quad R_{(\nu\mu\lambda\kappa)} = 0 \\ & \text{II)} \quad R_{[\nu\mu\lambda]\kappa} = 0 \qquad \text{II')} \quad R_{[\nu\mu\lambda\kappa]} = 0 \\ & \text{III)} \quad R_{\nu\mu(\lambda\kappa)} = 0 \\ & \text{IV)} \quad R_{\nu\mu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\nu\mu} \end{aligned}$$

Uit I, III en IV volgt dat  $R_{\nu\mu\lambda\kappa}$  een bivectortensor is, dat is een tensor in de  $E_{\binom{n}{2}}$  der bivectoren. Het aantal kentallen zou dus dienovereenkomstig moeten zijn  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} (\binom{n}{2} + 1)$ . Maar de onafhankelijke identiteit II' voegt er nog  $\binom{n}{4}$  voorwaarden aan toe, zodat het aantal kentallen wordt  $\frac{1}{2} n^2 (n^2 - 1)$ , dat is 1 voor  $n = 2$ ; 6 voor  $n = 3$ ; 20 voor  $n = 4$ .

Naar Bianchi wordt de volgende identiteit in  $A_n$  genoemd

$$9.23) \quad \boxed{\nabla_{[\omega} R_{\nu\mu]\lambda}^{\quad\kappa} = 0}$$

Men bewijst eerst dat er voor ieder punt altijd tenminste één coördinatenstel  $\{h\}$  bestaat zo dat de  $\Gamma_{ji}^h$  in dat ene punt nul zijn. Dan volgt (9.23) direct uit (9.2) door uitschrijven van de kentallen t.o.v. dat stelsel. Nu is inderdaad voor een punt  $\xi_0^k$  waar de  $\Gamma_{\mu\lambda}^k$  de waarden  $\Gamma_{\mu\lambda}^k|_0$  hebben een dergelijk stelsel  $\xi^h$  gegeven door de vergelijking

$$9.24) \quad \xi^k - \xi_0^k = \delta_h^k \xi^h - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\lambda}^k \delta_{ji}^{\mu\lambda} \xi^j \xi^i$$

want

$$9.25) \quad A_i^k = \delta_i^k - \Gamma_{\mu\lambda}^k \delta_{ji}^{\mu\lambda} \xi^j$$

$$\partial_j A_i^k = -\Gamma_{\mu\lambda}^k \delta_{ji}^{\mu\lambda}$$

zodat in  $\xi_0^k$  (verg. (6.6)):

$$9.26) \quad \Gamma_{ji}^h = A_{jik}^{\mu\lambda h} \Gamma_{\mu\lambda}^k + A_k^h \partial_j A_i^k = 0$$

Een dergelijk coördinatenstel  $\{h\}$  heet in  $\xi_0^k$  geodetisch. Men kan nog veel sterkere eisen stellen bijv. dat behalve  $\Gamma_{ji}^h$  ook  $\partial(j, \Gamma_{ji}^h)$ ,  $\partial(j, \partial(j, \Gamma_{ji}^h))$  enz. in  $\xi_0^k$  nul worden. Dan krijgt men de normaalcoördinaten van Veblen die voor veel onderzoekingen van nut zijn.

Door vouwen over  $K$  (9.23) verkrijgt men uit (9.23)

$$9.27) \quad \nabla_{[\omega} U_{\mu\lambda]} = 0$$

Door vouwen over  $\omega, k$  ontstaat

$$9.28) \quad \nabla_k R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} - 2 \nabla_{[\nu} R_{\mu]\lambda} = 0$$

In een  $V_n$  kan men nog verder gaan en (9.28) overschuiven met  $g^{\mu\lambda}$ , dan ontstaat

$$9.29) \quad \nabla_k R_{\nu}^{\dots k} - \nabla_{\nu} R + \nabla_k R_{\nu}^{\dots k} = 0 ; R \stackrel{\text{def}}{=} R_{\mu\lambda} g^{\mu\lambda}$$

of

$$9.30) \quad \nabla_{\mu} G_{\lambda}^{\dots \mu} = 0 ; G_{\lambda k} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\lambda k} - \frac{1}{2} R g_{\lambda k}$$

De scalar  $k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n(n-1)} R$  is de scalaire kromming van de  $V_n$ .

Voor  $n=2$  is dit de gewone Gaussische kromming der  $V_2$ . Voor  $n=4$  is  $G_{\lambda k}$  wel bekend als impulsenergietensor en (9.30) drukt het behoud van energie en impuls uit.

Geldt in een  $V_n$  dat  $R_{\nu\mu\lambda k} :: g_{[\nu\lambda} g_{\mu]k}$  dan volgt uit de definitie van  $R$  dat

$$9.31) \quad R_{\nu\mu\lambda k} = -\frac{2}{n(n-1)} R g_{[\nu\lambda} g_{\mu]k} = -2k g_{[\nu\lambda} g_{\mu]k}$$

Voor  $n=2$  is dit altijd zo omdat  $R_{\nu\mu\lambda k}$  daar een product van twee bivectoren is en alle bivectoren eakelvoudig en op een scalaire factor na aan elkaar gelijk zijn. Voor  $n > 2$  volgt uit (9.23) dat  $k$  een constante is. De  $V_n$  heet dan een ruimte van constante kromming of  $S_n$ . Een  $S_2$  is een  $V_2$  waarin  $k$  een constante is.

## § 10. Verschillende soorten van $V_n$ .

Een  $V_n$  is een  $X_n$  waarin een reële fundamentealtensor  $g_{\lambda k}$  van de rang  $n$  gegeven is. Is  $g_{\lambda k}$  positief definit, dan heet de  $V_n$  gewoon.

Indeling der  $V_n$ 's geschiedt naar de speciale eigenschappen van  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k}$  en  $g_{\lambda k}$  en de uit deze beide grootheden en de covariante afgeleiden van  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k}$  afleidbare comitanten. Comitante der  $V_n$  = grootheid die zich uit deze grootheden laat afleiden door voor coördinatentransformaties invariante vergelijkingen in de kentallen. Bijv.  $R_{\mu\lambda}, R, g_{\mu\lambda}$ . Een ruimte met  $R_{\mu\lambda} :: g_{\mu\lambda}$  heet bijv. een Einstein ruimte. Een  $S_n$  is dus een speciaal geval van een Einsteinruimte.

## § 11. Onderruimten van $V_n$ .

Wordt een  $X_m$  in  $V_n$  gegeven, dan is ieder lijnelement van de  $X_m$  ook een lijnelement van  $V_n$ . Is de fundamentealtensor van  $V_n$  positief definit (het geval der gewone  $V_n$ ) en is de  $X_m$  reël dan is de lengte van het lijnelement zeker niet nul. De  $X_m$  is dus ook weer een  $V_m$  met een eigen fundamentealtensor (later uit te rekenen).



Het eenvoudigste voorbeeld is een reële kromme. Zulk een kromme wordt behandeld precies als in § 4 een kromme in  $R_n$  met kromlijnige coördinaten. Alle formules blijven gelden, alleen kunnen we natuurlijk nooit teruggaan tot rechtlijnige coördinaten want die zijn er niet in  $V_n$ .

Om dergelijke gevallen van inbedden in  $V_n$  te behandelen, gaan we eerst terug naar een  $\xi_n$  en beschouwen een  $\xi_m$  in  $\xi_n$  door de oorsprong. Zulk een  $\xi_m$  kan gegeven worden in rechtlijnige coördinaten  $\xi^k$  of door  $n-m$  lineaire vergelijkingen

$$11.1) \quad C_\lambda^x \xi^\lambda = 0 ;$$

of ook door  $n$  vergelijkingen met  $m$  parameters:

$$11.2) \quad \xi^k = B_b^k \eta^b ; b = 1, \dots, m.$$

waarbij de parameters  $\eta^b$  in de  $\xi_m$  rechtlijnige coördinaten zijn. De twee hier optredende grootheden  $B_b^k$  en  $C_\lambda^x$  heten de contra- en co-variante verbindingsgrootheden van  $\xi_m$  in  $\xi_n$ .  $B_\lambda^k, \dots, B_m^k$  zijn  $m$  contravariante vectoren in de  $\xi_m$  en  $C_\lambda^{m+1}, \dots, C_\lambda^n$   $n-m$  covariante vectoren door de  $\xi_m$ .

We beschouwen nu in enig punt van  $\xi_m$  bijv. de oorsprong

1° een contravariante vector  $v^b$  van  $\xi_m$ . Dan is

$$11.3) \quad v^k = B_b^k v^b ; b = 1, \dots, m.$$

een vector van  $\xi_n$ . Meetkundig is het dezelfde vector waarvan de pijl in de  $m$ -richting van  $\xi_m$  ligt. De  $v^k$  zijn alleen een ander soort kentallen, vandaar dat de kernletter dezelfde blijft.

N.B.:  $v^k$  en  $v^b$  bepalen elkaar eenduidig.

2° een contravariante vector  $u^k$  van  $\xi_n$ . Men kan hier vormen

$$11.4) \quad u^x = C_\lambda^x u^\lambda ; x = m+1, \dots, n$$

Wat is dat? Beschouw de vergelijkingen

$$11.5) \quad C_\lambda^x \xi^\lambda = \eta^x ; x = m+1, \dots, n$$

Bij variabele  $\eta^x$  stellen deze voor alle  $\infty^{n-m} \xi_m$ 's in  $\xi_n$  die evenwijdig zijn aan de eerst gegeven  $\xi_m$ . Deze verzameling kan worden opgevat als een  $\xi_{n-m}$  waarin elke  $\xi_m$  zich als een punt afbeeldt. Men noemt deze  $\xi_{n-m}$  de samenlegging (reduction, Zusammenlegung) van  $\xi_n$  naar  $\xi_m$ . De  $\eta^x$  zijn rechtlijnige coördinaten in deze  $\xi_{n-m}$ .  $u^x$  is een vector in deze ruimte en heet de samenlegging van  $u^k$  naar de  $\xi_m$ .

N.B.:  $u^x$  is bepaald door  $u^k$  maar niet omgekeerd.

3° een covariante vector  $w_\lambda$  van  $\xi_n$ . De vector

$$11.6) \quad w_b = B_b^\lambda w_\lambda$$

is een vector van  $\xi_m$ , meetkundig voorgesteld door de twee parallelle  $\xi_{m-1}$ 's die ontstaan wanneer de twee  $\xi_n$ 's van  $w_\lambda$  met de  $\xi_m$  gesneden worden.  $w_b$  heet de doorsnede van  $w_\lambda$  met de  $\xi_m$ . N.B.  $w_\lambda$  bepaalt wel  $w_b$  maar niet omgekeerd, inderdaad, kan men door de twee  $\xi_{m-1}$ 's  $\infty^{n-m}$  stellen van parallelle  $\xi_{n-1}$ 's leggen.

4° een covariante vector  $u_y$  van de  $\mathcal{E}_{n-m}$ . De vector

$$11.7) \quad u_\lambda = C_\lambda^x u_x$$

is een vector van  $\mathcal{E}_n$ . Zijn  $\mathcal{E}_{n-1}$ 's zijn de  $\mathcal{E}_{n-m-1}$ 's van  $u_x$ , geïnterpreteerd in  $\mathcal{E}_n$ , immers ieder punt der  $\mathcal{E}_{n-m}$  stelt een  $\mathcal{E}_m$  in  $\mathcal{E}_n$  voor en dus een  $\mathcal{E}_{n-m-1}$  een  $\mathcal{E}_{n-1}$ .  $u_\lambda$  en  $u_x$  zijn slechts twee verschillende soorten kentallen van dezelfde grootheid. N.B.  $u_\lambda$  en  $u_x$  bepalen elkaar eenduidig.

Het komt nu wel voor dat er behalve  $\mathcal{E}_m$  in  $\mathcal{E}_n$  nog een  $\mathcal{E}_{n-m}$  in  $\mathcal{E}_n$  door  $\bigcirc$  gegeven is, die geen richting met  $\mathcal{E}_m$  gemeen heeft. De  $\mathcal{E}_m$  heet dan ingespannen (rigged, eingespannt). Omgekeerd is ook de  $\mathcal{E}_{n-m}$  door  $\mathcal{E}_m$  in gespannen. Deze  $\mathcal{E}_{n-m}$  is niet dezelfde als de  $\mathcal{E}_{n-m}$  die daarnet door samenvoeging ontstond. Maar elke door (11.5) vastgelegde  $\mathcal{E}_m$  snijdt de eerste  $\mathcal{E}_{n-m}$  precies in één punt. Men kan dus de beide  $\mathcal{E}_{n-m}$ 's met elkaar identificeren en dat doen we dan ook altijd in een geval van inspanning.

De  $\mathcal{E}_{n-m}$  der inspanning worde gegeven door de vergelijkingen

$$11.8) \quad B_\lambda^\alpha \xi^\lambda = 0; \alpha = 1, \dots, m.$$

of ook door

$$11.9) \quad \xi^k = C_y^k \eta^y$$

Hierin zijn  $B_\lambda^1, \dots, B_\lambda^m$   $m$  covariante vectoren door de  $\mathcal{E}_{n-m}$  en  $C_{m+1}^k, \dots, C_n^k$   $n-m$  contravariante vectoren in de  $\mathcal{E}_{n-m}$  zodat  $B_\lambda^\alpha C_y^\lambda = 0$ . We richten het nu zo in, dat  $B_\beta^k, C_y^k$  en  $B_\lambda^\alpha, C_\lambda^\alpha$  bij hetzelfde paralleltoep horen, d.w.z. dat

$$B_\beta^k B_\kappa^\alpha = B_\beta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}; B_\beta^\alpha = \text{eenheidsaffinor der } \mathcal{E}_m$$

11.10)

$$C_y^k C_\kappa^x = C_y^x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}; C_y^x = \text{eenheidsaffinor der } \mathcal{E}_{n-m}$$

Nu kunnen we  $y^\alpha$  en  $y^x$  opvatten als nieuwe coördinaten in  $\mathcal{E}_n$  en samenvatten tot  $y^h$ ;  $h = 1, \dots, n$ . Alle kentallen van grootheden  $B$  en  $C$  zijn dan kentallen van de eenheidsaffinor der  $\mathcal{E}_n$   $B_\lambda^\alpha = A_\lambda^\alpha$ ;  $C_y^k = A_y^k$

$$B_\beta^k = A_\beta^k; C_\lambda^x = A_\lambda^x;$$

11.11)

$$B_\beta^\alpha = A_\beta^\alpha; C_y^x = A_y^x$$

$B$  en  $C$  zijn dus alleen stukken waarin  $A$  uiteenvalt, hetgeen op verschillende kan worden uitgedrukt

$$A_i^h = B_i^h + C_i^h; A_\lambda^h = B_\lambda^h + C_\lambda^h; A_i^k = B_i^k + C_i^k$$

11.12)

$$A_\lambda^k = B_\lambda^k + C_\lambda^k; B_\lambda^k \stackrel{\text{def}}{=} B_\beta^k B_\lambda^\beta; C_\lambda^k \stackrel{\text{def}}{=} C_y^k C_\lambda^y$$

Na de inspanning hebben we nu voor een vector  $u^k$  van  $\mathcal{E}_n$

$$11.13) \quad u^k = B_\lambda^k u^\lambda + C_\lambda^k u^\lambda = B_\alpha^k u^\alpha + C_x^k u^x$$

waarin de " $u^x$ " uit (2.4) optreedt maar nu als de projectie van  $u^x$  op  $\mathcal{E}_{n-m}$  (of ook  $\mathcal{E}_{n-m}$ -componente) en " $u^a$ " als projectie op  $\mathcal{E}_m$  (of ook  $\mathcal{E}_m$ -componente). Evenzo hebben we voor een covariante vector  $w_\lambda$  van  $\mathcal{E}_n$

$$11.14) \quad w_\lambda = B_\lambda^k w_k + C_\lambda^k w_k = B_\lambda^b w_b + C_\lambda^y w_y$$

waarin de doorsnede " $w_b$ " met  $\mathcal{E}_m$  (of ook  $\mathcal{E}_m$ -componente) uit (11.6) optreedt en evenzo een doorsnede " $w_y$ " met  $\mathcal{E}_{n-m}$ , (of ook  $\mathcal{E}_{n-m}$ -componente)

Het is duidelijk dat nu iedere vector van  $\mathcal{E}_m$  ( $\mathcal{E}_{n-m}$ ) en dus ook iedere grootheid van  $\mathcal{E}_m$  ( $\mathcal{E}_{n-m}$ ) na de inspanning als grootheid van  $\mathcal{E}_n$  kan worden opgevat en dus kentallen met griekse indices heeft.

Is een  $\mathcal{E}_n$  in  $R_n$  gegeven, dan spannen de richtingen loodrecht op  $\mathcal{E}_m$  altijd een  $\mathcal{E}_{n-m}$  op. Is de fundamentealtensor positief definitief en  $\mathcal{E}_m$  reëel, dan is het zeker dat  $\mathcal{E}_m$  en  $\mathcal{E}_{n-m}$  een  $R_m$  en  $R_{n-m}$  zijn en geen richtingen gemeen hebben en we krijgen dus een zeer bijzondere inspanning, de orthogonale. In dit geval moeten de twee projecties  $B_\lambda^k v^k$  en  $C_\lambda^k v^k$  van iedere vector  $v^k$  loodrecht op elkaar staan waaruit volgt dat

$$11.15) \quad C_\rho^k B_\sigma^k g_{k\lambda} = 0$$

of

$$11.16) \quad g_{k\lambda} = B_{k\lambda}^{p\sigma} g_{p\sigma} + C_{k\lambda}^{p\sigma} g_{p\sigma} = 'g_{k\lambda} + ''g_{k\lambda}.$$

' $g_{k\lambda}$  heet de  $\mathcal{E}_m$ -componente en '' $g_{k\lambda}$  de  $\mathcal{E}_{n-m}$ -componente van  $g_{k\lambda}$ . Neemt men het coördinatenstelsel ( $\tilde{h}$ ) zo dat  $B_\lambda^k, \dots, B_m^k, C_{m+1}^k, \dots, C_n^k$  onderling loodrechte eenheidsvectoren zijn, dan is

$$11.17) \quad 'g_{k\lambda} = \sum_a i_k^a i_\lambda^a; \quad ''g_{k\lambda} = \sum_x \tilde{i}_k^x \tilde{i}_\lambda^x \\ B_\lambda^k = \begin{matrix} b \\ i_\lambda^b \end{matrix}; \quad C_\lambda^k = \begin{matrix} y \\ i_\lambda^y \end{matrix} \\ a = 1, \dots, m; \quad x = m+1, \dots, n$$

Bewijs ter oefening dat

$$11.18) \quad B_\lambda^a = 'g^{ab} B_b^k g_{k\lambda}$$

Een  $X_m$  in  $X_n$  kan worden gegeven door de  $n-m$  vergelijkingen

$$11.19) \quad C^x(\xi^k) = 0; \quad C_\lambda^x \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\lambda C^x \quad x = m+1, \dots, n.$$

et de conditie dat  $C_\lambda^x$  de rang  $n-m$  heeft en ook door de  $m$  vergelijkingen

$$11.20) \quad \xi^k = B^k(\eta^a); \quad B_b^k \stackrel{\text{def}}{=} \partial_b B^k$$

et de conditie dat  $B_b^k$  de rang  $m$  heeft. Verder moet van de functies  $C^x$  en  $B^k$  worden geeist dat zij in de beschouwde omgeving analytisch of althans enige malen continu differentieerbaar zijn. Als te voren heten  $C_\lambda^x$  en  $B_b^k$  de co- en contravariante verbindingsgrootheid der  $X_m$  de lokale  $\mathcal{E}_n$  van een punt der  $X_m$  spannen  $B_\lambda^k, \dots, B_m^k$  een  $\mathcal{E}_m$  op, de tangerende  $\mathcal{E}_m$  aldaar en  $C_{m+1}^k, \dots, C_n^k$  gaan door die  $\mathcal{E}_m$ . Men kan nu aan der punt der  $X_m$  in de lokale  $\mathcal{E}_n$  de tangerende  $\mathcal{E}_m$  gaan inspannen. Dat het dan inspannen der  $X_m$ . Er komen dan in elke lokale  $\mathcal{E}_n$  grootheden

$B_\lambda^k$  en  $C_\gamma^k$  bij. In iedere lokale  $\mathcal{E}_n$  is alles net als boven, alleen moet men er rekening mee houden dat

1. de  $\eta^a$  nu coördinaten in  $X_m$  zijn;
2. er geen coördinaten  $\eta^k$  bestaan;
3. alle velden  $B_\lambda^k, C_\lambda^k, B_\lambda^a, C_\gamma^k$  alleen maar in de punten der  $X_m$  gedefinieerd zijn, de kentallen ervan dus wel functies van de  $\eta^a$  zijn, maar niet zonder meer maar als functie van de  $\xi$  mogen worden beschouwd.  $\partial_\mu B_\lambda^k$  heeft dus bijvoorbeeld geen betekenis maar  $B_\lambda^k \partial_\mu B_\lambda^k = \partial_\mu B_\lambda^k$  wel

Is de  $X_m$  reëel en de  $V_n$  gewoon, dan is er vanzelf een orthogonale inspanning van de  $V_m$  in de  $V_n$ . In de  $V_m$  hebben we dan de fundamentele tensor  $g_{\lambda\alpha}$  en daarvoor geldt volgens 11.16)

$$11.21) \quad g_{\lambda\alpha} = B_{\lambda\alpha}^{\lambda k} g_{\lambda k}$$

Maar daarnaast is er nog een ander stuk

$$11.22) \quad g_{\gamma k} = C_{\gamma k}^{\lambda k} g_{\lambda k}$$

dat de lengte vastlegt van een vector in een punt der  $X_m$ , gelegen in de  $R_{n-m}$  loodrecht op de tangerende  $R_m$ .

Tot nu hebben we nog niet naar een overbrenging gekeken. Laat eerst de  $X_n$  een  $A_n$  zijn en de  $X_m$  ingespannen. Zij  $v^a$  een veld van de  $V_m$ . De kentallen van dit veld als (alleen maar op  $X_m$ ) gedefinieerd veld der  $X_n$  zijn  $v^k = B_\lambda^k v^a$ . Dan bestaat  $\partial_\mu v^k$  niet, of althans is deze uitdrukking niet eenduidig bepaald. Zet men  $v^k$  buiten  $X_m$  op de een of andere wijze voort, dan krijgt  $\partial_\mu v^k$  betekenis, maar in elk geval ligt

$$11.23) \quad B_\lambda^k \partial_\mu v^k = B_\lambda^k B_\lambda^a \partial_\mu v^a = B_\lambda^k \partial_\mu v^a$$

volkomen vast hoe die voortzetting ook gekozen wordt. Men kan nu een overbrenging in  $X_m$  vastleggen door eenvoudig te eisen dat de covariante afgeleide van  $v^k$  in  $X_m$  de  $\mathcal{E}_m$ -componente is van de covariante afgeleide in  $X_n$ :

$$11.24) \quad \nabla_c v^a = B_{c k}^{\mu a} \nabla_\mu v^k = B_{c k}^{\mu a} \partial_\mu v^k + B_{c k}^{\mu a} \Gamma_{\mu\lambda}^k v^\lambda \\ = \partial_c v^a - B_c^\mu (\partial_\mu B_\lambda^a) B_\lambda^a v^b + B_{c k}^{\mu a} \Gamma_{\mu\lambda}^k v^\lambda$$

waaruit voor de overbrengingsparameters  $\Gamma_{c\lambda}^a$  dezer geïnduceerde overbrenging volgt:

$$11.25) \quad \Gamma_{c\lambda}^a = B_{c k}^{\mu a} \Gamma_{\mu\lambda}^k - B_{c k}^{\mu a} \partial_\mu B_\lambda^a$$

Uit  $\partial_\mu B_\lambda^a = 0$  volgt  $\Gamma_{c\lambda}^a = 0$  en een ingespannen  $X_m$  in  $A_n$  wordt dus door inductie zelf een  $A_m$ . Ieder oppervlak in  $\mathcal{E}_3$  wordt dus een  $A_2$  met het oppervlak wordt ingespannen.

De regel dat de covariante differentiaal van een grootheid der  $X_m$  in

$X_m$  de  $X_m$ -componente is van de covariante afgeleide in  $X_n$  geldt voor alle grootheden, niet alleen voor vectoren.

Is de  $X_n$  een gewone  $V_n$  dan hebben we vanzelf een inspanning. Nu is

$$11.26) \quad \nabla_c g_{\lambda a} = B_{c\lambda a}^{\mu\lambda k} \nabla_\mu g_{\lambda k} = -B_{c\lambda a}^{\mu\lambda k} \nabla_\mu g_{\lambda k}$$

Maar  $g_{\lambda k}$  kan uitgedrukt worden in  $n-m$  onderling loodrechte eenheidsvectoren  $i_\lambda$  loodrecht op de tangerende  $R_m$ .

$$11.27) \quad g_{\lambda k} = \sum_x i_\lambda^x i_k^x$$

Daar echter  $B_{\lambda}^{\lambda x} i_\lambda = 0$  volgt dan

$$11.28) \quad \nabla_c g_{\lambda a} = -B_{c\lambda a}^{\mu\lambda k} \nabla_\mu \sum_x i_\lambda^x i_k^x = 0$$

en dat wil zeggen dat de geïnduceerde overbrenging een Riemannsche is die behoort bij  $g_{\lambda a}$ . Aangezien een lijnelement  $d\eta^a$  als lijnelement  $B_{\lambda}^k d\eta^k$  van  $V_n$  opgevat de lengte

$$11.29) \quad \sqrt{B_{\lambda a}^{\lambda k} g_{\lambda k} d\eta^a d\eta^a} = \sqrt{g_{\lambda a} d\eta^a d\eta^a}$$

heeft is de  $X_m$ -componente  $g_{\lambda a}$  van de fundamentealtensor  $g_{\lambda k}$  juist de fundamentealtensor van  $V_m$ . Er wordt dus precies die Riemannsche overbrenging in  $V_m$  geïnduceerd die bij de Riemannsche maat in  $V_m$  hoort.

## § 12. De $V_{n-1}$ in een gewone $V_n$

Laat de  $V_{n-1}$  gegeven zijn door de vergelijking

$$12.1) \quad \xi^k = B^k(\eta^a); a = 1, \dots, n-1$$

De fundamentealtensor splitst zich in twee stukken

$$12.2) \quad g_{\lambda k} = g_{\lambda k} + g_{\lambda k}$$

en  $g_{\lambda k}$  is nu fundamentealtensor in de  $R_1$  loodrecht op de tangentialen  $R_{n-1}$  in elke locale  $R_n$ . Is dus  $n^k$  een eenheidsvector in die  $R_1$ , dan is  $g_{\lambda k} = n_\lambda n_k$  en

$$12.3) \quad g_{\lambda k} = g_{\lambda k} - n_\lambda n_k; B_\lambda^k = A_\lambda^k - n^k n_\lambda$$

$n^k$  is een veld over  $V_{n-1}$ , dus heeft  $\nabla_\mu n^k$  niet zonder meer zin, maar  $B_\mu^\lambda \nabla_\lambda n^k$  wel. Zelfs weten we dat

$$12.4) \quad B_\mu^\lambda (\nabla_\lambda n^k) n_k = -B_\mu^\lambda (\nabla_\lambda n_k) n^k = -B_\mu^\lambda (\nabla_\lambda n^k) n_k$$

We definiëren nu

$$12.5) \quad h_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} -B_{\mu\lambda}^{\sigma\rho} \nabla_\sigma n_\rho = -B_\mu^\sigma \nabla_\sigma n_\lambda$$

Dit is een grootheid der  $V_{n-1}$  met de kentallen

$$12.6) \quad h_{cb} = -B_{cb}^{\mu\lambda} \nabla_\mu n_\lambda$$

in de  $V_{n-1}$  en we bewijzen dat  $h_{cb}$  een tensor is.

Schrijven we de vergelijking van de  $V_{n-1}$  in de vorm

$$b = 1 \dots m, \quad x = m+1, \dots, n$$

Gegeven een  $E_m$  in  $E_n$   $\left\{ \begin{array}{l} C_\lambda^x \xi^\lambda = 0 \\ \xi^\lambda = B_\lambda^x \eta^x \end{array} \right.$

$B_\lambda^x, \dots, B_\lambda^m$  zijn  $m$  willekeurige onafhankelijke contravariante vectoren in  $E_m$ ;  $C_\lambda^{m+1}, \dots, C_\lambda^n$   $n-m$  willekeurige onafh. covariante vectoren door  $E_m$ .

De  $E_m$ 's parallel aan  $E_m$ :  $C_\lambda^x \xi^\lambda = \eta^x$ ; deze vormen een  $E_{n-m}$  (samenlegging der  $E_n$ ).  $\eta^x$  zijn coördinaten in deze  $E_{n-m}$ .

$$\begin{array}{ccc} E_m & & E_n & & E_{n-m} \\ \downarrow & & & & \\ \boxed{v^a} & \xrightarrow[\text{soort kentallen}]{\text{verandering}} & v^k = B_\lambda^k v^\lambda \quad (C_\lambda^x v^\lambda = 0) & & \\ & & \text{voorw. voor oplosb.heid. naar } v^b) & & \\ & & \text{Bijzondere vector voor } E_m \text{ (ligt in } E_m) & & \end{array}$$

$$\boxed{u^k} \longrightarrow u^x = C_\lambda^x u^\lambda$$

(algemene vector van  $E_n$ ) (samenlegging van  $u^k$ )

$$w_\lambda = B_\lambda^x w_x \longleftarrow \boxed{w_x}$$

doorsnede van  $w_\lambda$  (algemene vector van  $E_n$ )

$$u_\lambda = C_\lambda^x u_x \xleftarrow[\text{soort kentallen}]{\text{verandering van}} \boxed{u_y}$$

(Bijzondere vector in  $E_n$ : gaat door  $E_m$ . Oplosb. naar  $u_x$  mits  $B_\lambda^k u_k = 0$ )

Inspanning: Geef bovendien een  $E_{n-m}$  in  $E_n$  die geen richting met  $E_m$  gemeen heeft:

$$\begin{cases} B_\lambda^x \xi^\lambda = 0 \\ \xi^x = C_y^x \eta^y, \text{ dus } C_y^x = \partial_y \xi^x \end{cases}$$

$C_{m+1}^x, \dots, C_n^x$  zijn  $n-m$  willekeurige onafh. contravar. vectoren in  $E_{n-m}$ ;  $B_\lambda^{m+1}, \dots, B_\lambda^n$   $m$  willekeurige onafh. covariante vectoren door  $E_m$ .

Vanzelf is  $B_{\ell}^{\mu} C_{\mu}^{\lambda} = 0$ ,  $C_{\lambda}^{\mu} B_{\mu}^{\alpha} = 0$ .  $\eta^{\alpha}$  zijn nu coördinaten in  $\mathcal{E}_m$ ,  $\eta^{\lambda}$  zijn coördinaten in deze ingevoerde  $\mathcal{E}_{n-m}$ , die met de door samen-  
legging ontstane  $\mathcal{E}_{n-m}$  wordt geïdentificeerd.  $\eta^{\alpha}, \eta^{\lambda}$  vormen nieuwe  
coördinaten in  $\mathcal{E}_n$ , naast de  $\xi^{\kappa}$ .

Bijgevolg zijn  $B_{\ell}^{\kappa} = \partial_{\ell} \xi^{\kappa}$  en  $C_{\gamma}^{\kappa} = \partial_{\gamma} \xi^{\kappa}$  al stukken van  $A_i^{\kappa}$ ;  $i = 1, \dots, n$ :  
 $A_{\ell}^{\kappa} = B_{\ell}^{\kappa}$ ,  $A_{\gamma}^{\kappa} = C_{\gamma}^{\kappa}$ .

Daarnaast bestaat nu  $A_{\lambda}^i = \partial_{\lambda} \eta^i$ . De  $A_{\lambda}^{\alpha}$  zijn  $m$  covariante onafh.  
vectoren door  $\mathcal{E}_m$ . Men kan dus de  $B_{\lambda}^{\alpha}$  en  $C_{\lambda}^{\lambda}$  zo kiezen dat  $B_{\lambda}^{\alpha} = A_{\lambda}^{\alpha}$  en  
 $C_{\lambda}^{\lambda} = A_{\lambda}^{\lambda}$ . Dan zijn de stelsels  $B_{\lambda}^{\kappa}, \dots, B_m^{\kappa}$ ,  $C_{m+1}^{\kappa}, \dots, C_n^{\kappa}$  en  
 $B_{\lambda}^{\lambda}, \dots, B_m^{\lambda}$ ,  $C_{\lambda}^{\lambda}, \dots, C_n^{\lambda}$  reciprook, d.w.z. behorende bij hetzelfde  
parallelotoop. Dan geldt:

$$B_{\ell}^{\kappa} B_{\kappa}^{\alpha} = B_{\ell}^{\alpha}, \quad C_{\gamma}^{\kappa} C_{\kappa}^{\lambda} = C_{\gamma}^{\lambda}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_m & & \mathcal{E}_n & & \mathcal{E}_{n-m} \\ \boxed{v^{\alpha}} & \xrightarrow[\text{soort kentallen}]{\text{verandering}} & v^{\kappa} = B_{\ell}^{\kappa} v^{\ell} & \xrightarrow[\text{soort kentallen}]{\text{verandering}} & \boxed{v^{\lambda}} \end{array}$$

(bijzondere vectoren  $v \in \mathcal{E}_n$ ,  
liggen in  $\mathcal{E}_m$  resp.  $\mathcal{E}_{n-m}$ ).

$$\begin{array}{ccc} 'u^{\alpha} = B_{\lambda}^{\alpha} u^{\lambda} & \xleftarrow{\quad} & \boxed{u^{\kappa}} & \xrightarrow{\quad} & ''u^{\lambda} = C_{\lambda}^{\lambda} u^{\lambda} \\ \text{projectie op } \mathcal{E}_m; \mathcal{E}_m\text{-componente)} & & \text{(algemene vector v. } \mathcal{E}_n & & \text{(projectie op } \mathcal{E}_{n-m} \text{ of} \\ & & \text{dus: } u^{\kappa} = 'u^{\kappa} + ''u^{\kappa}) & & \mathcal{E}_{n-m} \text{ componente).} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 'w_{\ell} = B_{\ell}^{\lambda} w_{\lambda} & \xleftarrow{\quad} & \boxed{w_{\lambda}} & \xrightarrow{\quad} & ''w_{\gamma} = C_{\gamma}^{\lambda} w_{\lambda} \\ \text{(doorsn. m. } \mathcal{E}_m \text{ of } \mathcal{E}_m\text{-componente)} & & \text{(algemene vector v. } \mathcal{E}_n & & \text{(doorsn. m. } \mathcal{E}_{n-m} \text{ of } \mathcal{E}_{n-m} \\ & & \text{dus: } w_{\lambda} = 'w_{\lambda} + ''w_{\lambda}) & & \text{componente).} \end{array}$$

$$\boxed{u_{\ell}} \xrightarrow[\text{soort kentallen}]{\text{verandering}} u_{\lambda} = B_{\ell}^{\lambda} u_{\ell}$$

$$u_{\lambda} = C_{\lambda}^{\gamma} u_{\gamma} \xleftarrow{\quad} \boxed{u_{\gamma}}$$

(bijzond. vectoren in  $\mathcal{E}_n$ :  
gaan door  $\mathcal{E}_{n-m}$  resp.  $\mathcal{E}_n$ ).

1) Het teken  $\boxed{\quad}$  markeert waarvan we uitgaan.

2)  $'u^{\kappa}$  is de projectie van  $u^{\kappa}$  op  $\mathcal{E}_m$ , geschreven als vector in  $\mathcal{E}_n$ , dus:

$$'u^{\kappa} = B_{\ell}^{\kappa} 'u^{\ell} = B_{\ell}^{\kappa} B_{\lambda}^{\ell} u^{\lambda} = B_{\lambda}^{\kappa} u^{\lambda} \quad \text{Evenzo:}$$

$$''u^{\kappa} = C_{\lambda}^{\kappa} u^{\lambda}, \quad 'w_{\lambda} = B_{\lambda}^{\mu} w_{\mu}; \quad ''w_{\lambda} = C_{\lambda}^{\mu} w_{\mu}$$

$$u^{\kappa} = 'u^{\kappa} + ''u^{\kappa} \text{ en } w_{\lambda} = 'w_{\lambda} + ''w_{\lambda} \text{ gelden dan wegens: } A_{\lambda}^{\kappa} = B_{\lambda}^{\kappa} + C_{\lambda}^{\kappa}$$

$$12.7) \quad C(\xi^k) = 0$$

dan is  $\partial_\lambda C$  een tangentiaalvector van de  $V_{n-1}$  en dus is  $n_\lambda = \sigma \partial_\lambda C$  en bijgevolg, daar  $B_\lambda^\lambda n_\lambda = 0$

$$12.8) \quad h_{cb} = -\sigma B_{cb}^{\mu\lambda} \nabla_\mu \partial_\lambda C = -\sigma B_{cb}^{\mu\lambda} (\partial_\mu \partial_\lambda C - \Gamma_{\mu\lambda}^k \partial_k C) = h_{(cb)}$$

$h_{cb}$  is bekend als de tweede fundamentealtensor van de  $V_{n-1}$ .

Deze tweede fundamentealtensor voldoet aan een zeer eenvoudige betrekking indien men een bijzonder coördinatenstelsel invoert. Construeer de geodetische lijnen loodrecht op  $V_{n-1}$  en noem de langs zo'n lijn van uit  $V_{n-1}$  gemeten afstand  $\xi^n$ . Neem vervolgens  $\xi^a = \eta^a; a=1, \dots, n-1$

Dan hebben we in  $V_n$  een nieuw coördinatenstelsel  $\xi^k$  en op

$V_{n-1}$  is:

$$1^0: \quad e_n^k \text{ een eenheidsvector omdat } \frac{d\xi^k}{d\xi^n} = \frac{d\xi^k}{ds}$$

$$2^0: \quad g_{na} = g_{an} = 0 \text{ omdat } e_n^k \text{ loodrecht op } V_{n-1} \text{ is}$$

$$12.9) \quad 3^0: \quad ds^2 = d\xi^n d\xi^n + g_{ab} d\xi^a d\xi^b \quad (\text{geldt alleen op } V_{n-1})$$

$$4^0: \quad e_\lambda = e_{n\lambda}$$

$$5^0: \quad g^{nn} = 1 \quad \text{Dientengevolge is in ieder punt van } V_{n-1} \\ h_{cb} = B_{cb}^{\mu\lambda} \nabla_\mu e_\lambda = -B_{cb}^{\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^n = -\Gamma_{cb}^n =$$

$$12.10) \quad = -\frac{1}{2} g^{nn} (\partial_c g_{nb} + \partial_b g_{nc} - \partial_n g_{cb}) = -\frac{1}{2} \partial_n g_{cb}$$

Bij deze speciale keuze van het coördinatenstelsel is dus  $h_{cb}$  de eerste afgeleide van  $g_{cb}$  in de richting loodrecht op  $V_{n-1}$

We beschouwen nu een kromme in de  $V_{n-1}$ . Zij  $i^k = \frac{d\xi^k}{ds}$  langs de kromme. Als kromme van de  $V_n$  beschouwd is

$$12.11) \quad u^k \stackrel{\text{def}}{=} i^\mu \nabla_\mu i^k$$

de vector van de eerste kromming. In § 4 gebruikten we  $j_1^k$  en  $j_2^k$  voor  $i^k$  en  $u^k$ . Maar als kromme van de  $V_{n-1}$  beschouwd is de eerste kromtevector

$$12.12) \quad u^k \stackrel{\text{def}}{=} i^\mu \nabla_\mu i^k = i^\mu B_{\mu p}^{\sigma k} \nabla_\sigma i^p \\ = B_p^k i^\mu \nabla_\mu i^p = B_\lambda^k u^\lambda$$

Bijgevolg is dus  $u^k$  de projectie van  $u^k$  op  $V_{n-1}$ . Aangezien hier

$$12.13) \quad A_\lambda^k = B_\lambda^k + n_\lambda n^k$$

$$\text{is} \quad u^k = u^k + n^k n_\lambda i^\mu \nabla_\mu i^\lambda = u^k - i^\mu i^\lambda (\nabla_\mu n_\lambda) n^k = u^k + i^\mu i^\lambda h_{\mu\lambda} n^k$$

Deze vectoren hebben namen:

$$12.14) \quad \begin{aligned} u^k & \text{ absolute kromtevector} \\ i^k & \text{ relatieve kromtevector} \\ u^k & \stackrel{\text{def}}{=} i^\mu i^\lambda h_{\mu\lambda} n^k \text{ gedwongen kromtevector} \end{aligned}$$



Voor een geodetische lijn in  $V_n$  is  $u^k$  nul en voor een geodetische lijn in  $V_{n-1}$  verdwijnt  $u^k$ . Zijn dus alle geodetische lijnen van  $V_{n-1}$  tegelijk geodetisch in  $V_n$  dan moet  $i^{\mu\lambda} h_{\mu\lambda} = 0$  zijn voor iedere keuze van  $i^k$ , d.w.z. nodig en voldoende is dat  $h_{\mu\lambda}$  nul is over  $V_{n-1}$ . In dit geval heet de  $V_{n-1}$  geodetisch in  $V_n$ . Is  $h_{\mu\lambda} = 0$  in een punt van  $V_{n-1}$ , dan heet de  $V_{n-1}$  in dit punt geodetisch. Is  $u^k = 0$ , dan is ook  $u^k = 0$  en  $u^k = 0$ . Iedere in  $V_n$  geodetische lijn die geheel in  $V_{n-1}$  ligt is dus ook in  $V_{n-1}$  geodetisch en heeft een gedwongen kromtevector nul. Iedere geodetische lijn van een geodetische  $V_{n-1}$  is ook in  $V_n$  geodetisch omdat  $u^k = u^k = 0$ .

De lengte  $k$  van  $u^k$  is de eerste kromming van de kromme in  $V_n$  (in § 4 met  $k$  aangeduid). We noemen  $k$  de absolute (eerste) kromming. De lengte  $k$  van  $u^k$  is de eerste kromming in  $V_{n-1}$ . We noemen  $k$  de relatieve (eerste) kromming. Verder schrijven we

$$(12.16) \quad "k \stackrel{\text{def}}{=} i^{\mu\lambda} h_{\mu\lambda}$$

en noemen  $"k$  de gedwongen (eerste) kromming.  $"k$  kan positief, negatief of nul zijn. Het teken ligt vast wanneer de zin van  $n^k$  gegeven is en slaat om wanneer de zin van  $n^k$  wordt omgekeerd. Natuurlijk is de vector  $u^k$  onafhankelijk van de zin van  $n^k$ . We denken ons  $h^k$  altijd vast gegeven over  $V_{n-1}$ . Alle krommen van  $V_{n-1}$  met dezelfde raaklijn in een bepaald punt hebben aldaar dezelfde gedwongen kromming.

In  $V_{n-1}$  hebben we nu twee reële tensoren,  $g_{\alpha\beta}$  altijd positief definit, en  $h_{\alpha\beta}$  definit of indefinit.  $h_{\alpha\beta}$  heeft dus  $n-1$  hoofdassen. De richtingen daarvan heten hoofdkromterichtingen en krommen op  $V_{n-1}$  die overal in een hoofdkromterichting liggen hoofdkromtelijnen. Voor een hoofdkromterichting heeft  $"k$  een extreme waarde en heet een hoofdkromming aan de  $V_{n-1}$ . Is de  $V_n$  een  $R_n$  dan kan men in een punt  $\xi^k$  van  $V_{n-1}$  de normaal op  $V_{n-1}$  trekken en daardoor een  $R_1$  leggen. Deze  $R_1$  snijdt de

$V_{n-1}$  in een vlakke kromme waarvan we zeker weten dat de eerste normaal in de richting van  $n^k$  valt. Bijgevolg valt  $u^k$  in die richting en daaruit volgt dat  $u^k$  in  $\xi^k$  nul is, dus dat  $k = \pm "k$ .  $"k$  is dus op het teken na (dat van de keuze van de zin van  $n^k$  afhangt) de kromming van de vlakke in  $\xi^k$  loodrechte doorsneden. Draait  $R_1$  om de normaal, dan neemt  $"k$  alle mogelijke waarden aan en wordt extreem voor hoofdkromterichtingen. De hoofdkromterichtingen kunnen onbepaald worden. Zij worden volledig onbepaald voor  $h_{\alpha\beta} :: g_{\alpha\beta}$ . Zulk een punt heet een navelpunt of umbilicaalpunt. Aldaar is iedere richting hoofdkromterichting.

Is  $h_{\alpha\beta}$  indefinit dan zijn er reële richtingen

$1^0$  die voldoen aan

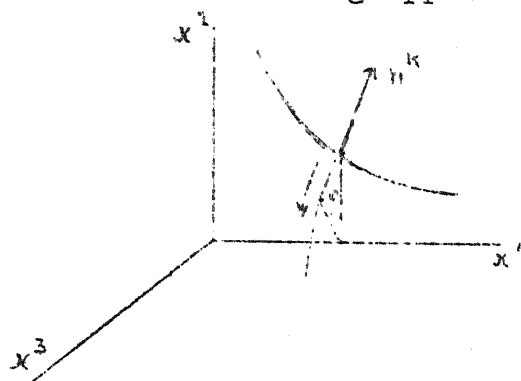
$$(12.16) \quad i^{\mu\lambda} h_{\mu\lambda} = 0$$

Deze richtingen heten hoofdtangentenrichtingen (12.16) bepaalt de hoofdtangentenkegel in het beschouwde punt (in de lokale  $R_{n-1}$ ). Voor deze richtingen is  $u^k = u^k$ , d.w.z.  $u^k$  is of nul, of ligt in de  $V_{n-1}$ .

Krommen van  $V_n$ , die overal in een hoofdtangentenrichting liggen heten hoofdtangentenlijnen. Een hoofdtangentenlijn heeft in elk punt als kromme der  $V_n$  beschouwd, of kromming nul, of een osculerende 2-richting die in  $V_{n-1}$  ligt. Heeft  $h_{\ell a}$  niet de rang  $n-1$  dan degenerereert de hoofdtangentenkegel, is de rang  $r < n-1$  dan bestaat er in de lokale  $R_{n-1}$  een  $R_{n-1-r}$  waarvan alle richtingen hoofdtangentenrichtingen zijn met de vergelijking

$$12.17) \quad \epsilon^b h_{\ell a} = 0$$

Voorbeeld: Omwentelingsoppervlakken in een gewone  $R_3$



Kromme in het 12-vlak

$$12.18) \quad x^2 = f(x^1)$$

Omwentelingsoppervlak

$$12.19) \quad \begin{aligned} x^1 &= \eta^1 \\ x^2 &= f(\eta^1) \cos \eta^2 \\ x^3 &= f(\eta^1) \sin \eta^2 \end{aligned}$$

waarbij we  $\eta^1 = x^1$  en  $\eta^2 = \varphi$  als parameters op de  $V_2$  invoeren.

Voor  $B_{\ell}^k$  volgt

$$12.20) \quad \begin{aligned} B_1^1 &= 1; B_1^2 = f' \cos \eta^2; B_1^3 = f' \sin \eta^2 \\ B_2^1 &= 0; B_2^2 = -f' \sin \eta^2; B_2^3 = f' \cos \eta^2 \end{aligned} \quad ; \quad f' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \eta^1}$$

$n^k$  staat loodrecht op de vectoren  $1, f' \cos \eta^2, f' \sin \eta^2$  en  $0, -f' \sin \eta^2, f' \cos \eta^2$  en heeft dus de kentallen (vorm het vectorproduct)

$$12.21) \quad n^1 = \frac{-f'}{\sqrt{1+f'^2}}; \quad n^2 = \frac{+\cos \eta^2}{\sqrt{1+f'^2}}; \quad n^3 = \frac{+\sin \eta^2}{\sqrt{1+f'^2}}$$

of het negatieve hiervan. Bij onze keuze van teken staat de normaal als in de figuur naar buiten. Voor  $h_{\ell b}$  hebben we (zie (12.6))

$$12.22) \quad h_{\ell b} = -B_{\ell b}^{\mu \lambda} \nabla_{\mu} n_{\lambda} = -B_{\ell b}^{\mu \lambda} \partial_{\mu} n_{\lambda} = -B_{\ell}^{\lambda} \partial_c n_{\lambda} = +n_{\lambda} \partial_c B_{\ell}^{\lambda}$$

en dus (daar  $n^k = n_k$ )

$$\begin{aligned} h_{11} &= n_1 \partial_1 B_1^1 + n_2 \partial_1 B_1^2 + n_3 \partial_1 B_1^3 \\ &= 0 + \frac{f'' \cos^2 \eta^2}{\sqrt{1+f'^2}} + \frac{f'' \sin^2 \eta^2}{\sqrt{1+f'^2}} = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}} \end{aligned}$$

$$12.23) \quad \begin{aligned} h_{12} &= h_{21} = 0 \\ h_{22} &= \frac{-f}{\sqrt{1+f'^2}} \end{aligned}$$

$h_{\epsilon\delta}$  is dus positief definit als  $f$  en  $f''$  verschillend teken hebben en indefinit in het andere geval (het geval van de figuur). De figuur van  $h_{\epsilon\delta}$  is een hyperbool in het raakvlak (hier identiek met de lokale  $R_2$ )

Daar

$$12.24) \quad 'g_{\epsilon\delta} = B_{\epsilon\delta}^{\mu\lambda} g_{\mu\lambda}$$

is

$$12.25) \quad 'g_{11} = 1 + f'^2; \quad 'g_{12} = 0; \quad 'g_{22} = f''^2$$

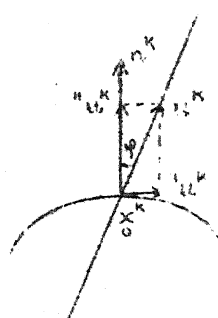
liggen de hoofdkromterichtingen in de parameterlijnen van  $\eta^1$  en  $\eta^2$ , dat zijn hier de meridianen en parallelcirkels. De hoofdkrommingen zijn

$$12.26) \quad \frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} \quad \left( \text{dit is inderdaad de formale voor de kromming van de kromme } x^2 = f(x^1) \right)$$

$$\frac{h_{22}}{g_{22}} = -\frac{1}{f\sqrt{1+f'^2}}$$

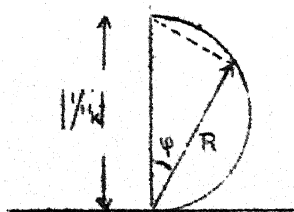
$h_{\epsilon\delta}$  degenerereert als  $\text{Det}(h_{\epsilon\delta}) = h_{11} h_{22} = 0$ . Dit kan hier alleen als  $f'' = 0$ , d.w.z. bij een kegel. De hoofdtangentenlijnen zijn dan de beschrijvende. Zij zijn hier toevallig ook geodetisch in  $R_3$ . In het algemeen zijn  $\sqrt{\frac{h_{11}}{g_{11}}}$  en  $\sqrt{\frac{h_{22}}{g_{22}}}$  de halve assen van de ellips of hyperbool en de hoofdtangentenlijnen liggen in de richting van de asymptoten.

Snijdt men een  $V_2$  in  $R_3$  met een vlak door  $x_0^k$  dan kan men vragen hoe de kromming van de doorsnede verandert als het vlak om  $x_0^k$  draait. Het antwoord is vervat in de stellingen van Meusnier en Euler.



vlak van doorsnede

$i^k \perp$  vlak van tekening



Beschouw een vector  $i^k$  in  $x_0^k$ . Breng de doorsnede met een vlak  $i^k$  in tekening. Laat nu een snijvlak om  $i^k$  draaien.  $u^k$  ligt in dit vlak  $\perp$  op  $i^k$  en  $u^k$  is zijn projectie op het raakvlak. De projectie  $u^k$  op de normaal is voor alle krommen met raakvector  $i^k$  dezelfde.  $u^k$  wordt dus groter als  $\varphi$  aangroeit en  $\infty$  voor  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .  $u^k$  is invariant en  $k \frac{|u^k|}{\cos \varphi}$

Voor de kromtestraal  $R = k^{-1}$  geldt dus

$$R = \left| \frac{1}{k} \right| \cos \varphi \quad . \text{ Dit is de}$$

stelling van Meusnier die de kromming geeft als kromming van de loodrechte doorsnede met dezelfde raaklijn en

de hoek gegeven zijn.

Beschouw nu nog alleen loodrechte doorsneden en laat het snijvlak aaien om  $n^k$ . Voor deze is  $u^k = u^k$  en (zie (12.15))

$$12.27) \quad "K = i^c i^b h_{cb}$$

Neem in het raakvlak twee eenheidsvectoren  $i^a; a = 1, 2$  (niet te verwarren met de maatvectoren  $e^a$  van de parameterlijnen, die geen eenheidsvectoren behoeven te zijn) en stel

$$12.28) \quad i^a = \cos \varphi i_1^a + \sin \varphi i_2^a$$

dan is

$$12.29) \quad "K = h_{11} \cos^2 \varphi + 2 h_{12} \cos \varphi \sin \varphi + h_{22} \sin^2 \varphi$$

(de  $h_{\alpha\beta}$  zijn koëfficiënten t.o.v. van dit lokale stel eenheidsvectoren, niet te verwarren met de  $h_{\alpha\beta}$ ). Kiest men  $i_1^a$  en  $i_2^a$  in de hoofdkromterichtingen, dan komt er

$$12.30) \quad "K = "K_1 \cos^2 \varphi + "K_2 \sin^2 \varphi$$

Omdat immers  $h_{11}$  en  $h_{22}$  nu de hoofdkrommingen zijn. Dit is de stelling van Euler.

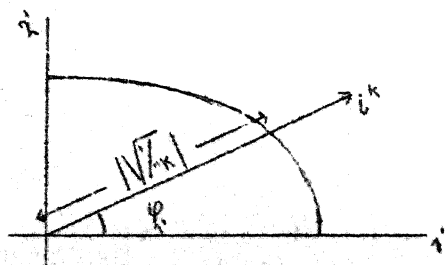
Men kan dit veralgemenen voor  $V_{n-1}$  in  $V_n$ . Logt men nu in de lokale  $R_{n-1}$  een orthogonaal stelsel  $i^a; a = 1, \dots, (n-1)$  in de hoofdkromterichtingen, dan wordt  $"K$  voor een richting  $i^a$  met de richtingscoëfficiënten  $\cos \varphi$  t.o.v. dit lokale stelsel.

$$12.31) \quad "K = i^c i^b h_{cb} = \sum_a "K_a \cos^2 \varphi_a$$

Beemt men de orthogonale coördinaten in de  $R_{n-1}$   $X^a$  dan is het geometrisch beeld van  $h_{cb}$  het hyperoppervlak

$$12.32) \quad h_{cb} X^c X^b = h_{11} X^1 X^1 + \dots + h_{(n-1)(n-1)} X^{(n-1)} X^{(n-1)} = \pm 1$$

met de halve assen  $1: \sqrt{|h_{\alpha\alpha}|}; h_{\alpha\alpha} = "K_\alpha$ .



Het snijpunt van een lijn in de richting van  $i^a$  hebbe de coördinaten

$l \cos \varphi$ . Dit punt moet aan (12.32) voldoen en daaruit volgt

$$12.33) \quad l = |"K|^{-1/2}$$

Het geometrische beeld geeft dus direct de waarde van  $|"K|$  voor iedere richting. Het beeld staat bekend als

de Dupin'se indicatrix. Voor bijzondere gevallen hebben we

- 1°  $h_{cb}$  definit. Alle hoofdkrommingen hetzelfde teken, geen reële hoofdtangentenrichtingen.
- 2°  $h_{cb} :: g_{cb}$  indicatrix is hyperbol, navelpunt.
- 3°  $h_{cb}$  indefinit. Er zijn positieve en negatieve hoofdkrommingen en reële hoofdtangentenrichtingen.

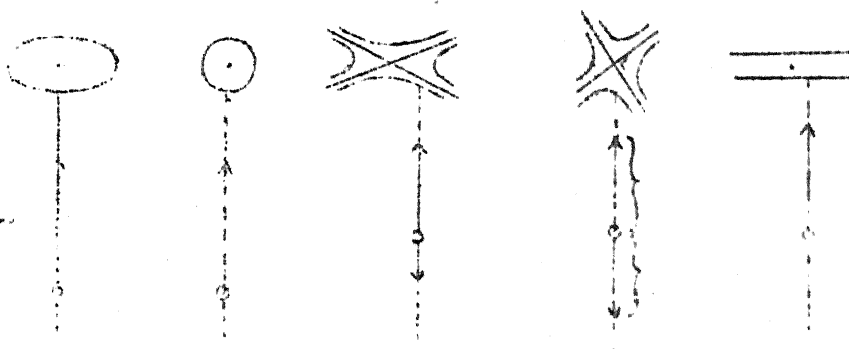
4°  $h_{c\delta}$  rang  $< n-1$  Indicatrix gedegenereerd, voor  $n=3$  bijv.

5°  $h_{c\delta} = 0$  ; geodetisch punt der  $V_{n-1}$

De vector " $u^k$ " ligt altijd in de normaal. Voor  $n=3$  hebben we de volgende mogelijkheden:

Indicatrix

mogelijke ligging van eindpunt " $u^k$ " getrokken deel der normaal



Ligt  $u^k$  in een hoofdrichting, dan is

$$(12.34) \quad i^c h_{c\delta} = {}^n k i_\delta = {}^n k i^c g_{c\delta}$$

waaruit volgt dat de hoofdkrommingen de wortels zijn van de vergelijking

$$(12.35) \quad \text{Det.} (h_{c\delta} - {}^n k g_{c\delta}) = 0$$

Schrijven we dit uit voor  $n=3$ :

$$h_{11}h_{22}h_{33} - 2 {}^n k h_{11}g_{22}h_{33} + {}^n k^2 g_{11}g_{22}h_{33} = 0$$

(12.36)

$$\begin{aligned} f' &= 2 h_{11} h_{22} h_{33} \\ f'' &= 2 h_{11} g_{22} h_{33} \\ f''' &= 2 g_{11} g_{22} h_{33} \end{aligned}$$

waarin drie dichtheden van het gewicht  $+2$  in  $V_{n-1}$  optreden. Noemt men de twee wortels  $\frac{1}{R_1}$  en  $\frac{1}{R_2}$  dan zijn  $R_1$  en  $R_2$  de hoofdkromtestralen en uit

(12.36) blijkt dat

$$(12.37) \quad \frac{f'}{f} = \frac{1}{R_1 R_2} ; \quad 2H \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{f''}{f} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Voor een omwentelingsoppervlak in  $R_3$  hebben we volgens (12.23) en (12.25)

$$(12.38) \quad f' = f^2 (1 + f'^2)$$

$$(12.39) \quad 2 \frac{f''}{f} = \frac{f^2 f''}{V_1 + f'^2} = f \sqrt{1 + f'^2}$$

$$(12.40) \quad f = - \frac{f f''}{1 + f'^2}$$

$$(12.41) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{f''}{f(1 + f'^2)^2}$$

$$(12.42) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \frac{1 + f'^2 - f f''}{f(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Klopt met  
(12.26)

Stellen we eens de vraag wanneer  $R = \mathbb{R}$  dan geeft dit de differentiaalvergelijking

$$12.43) \quad f f'' = -(1 + f'^2)$$

waaraan bijvoorbeeld voldaan wordt door  $x^2 x' + f^2 = x^2 x' + x^2 x'^2 = c^2$

### § 13. De vergelijkingen van Gauss en Codazzi voor $V_{n-1}$ in $V_n$

Is  $u_\beta$  een veld in  $V_{n-1}$  dan is

$$12.44) \quad \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} u_\gamma = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} u_\delta$$

waarin  $\nabla_\beta$  het symbool der covariante differentiatie in  $V_{n-1}$  is en  $R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$  de kromtegrootheid der  $V_n$ . Nu kan iedere covariante afgeleide van een grootheid van  $V_{n-1}$  in de  $V_{n-1}$  worden uitgedrukt in de covariante afgeleide in  $V_n$  en een aantal B's (verg. (11.24) en wanneer men dat nu in (12.44) tweemaal doet dan moet  $\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} u_\gamma$  voor den dag komen, d.w.z. de kromtegrootheid  $R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$  in  $V_n$ . Dit leidt tot de naar Gauss genoemde stelling. Past men eenzelfde proces toe op  $\nabla_{[\alpha} h_{\beta]\gamma}$ , daarbij bedenkende dat zich  $h_{\alpha\beta}$  zelf al in  $\nabla_\mu n_\lambda$  en twee factoren B laat uitdrukken (zie (12.6)), dan komt er weer een betrekking waar  $R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$  in zit. Dat wordt de naar Codazzi genoemde stelling. De berekeningen zijn volstrekt niet lastig, men moet alleen maar telkens gebruik maken van de identiteit

$$12.45) \quad B_{\alpha\beta}^{\mu\lambda} \nabla_\mu B_\lambda^k = -B_{\alpha\beta}^{\mu\lambda} \nabla_\mu n_\lambda n^k = h_{\alpha\beta} n^k$$

maar door het grote aantal optredende B's worden de herleidingen wat onoverzichtelijk. Men kan nu de notatie wat vereenvoudigen. We hebben twee soorten grootheden, die van de  $V_{n-1}$ , die latijnse, maar ook griekse indices kunnen dragen en die van de  $V_n$  die uitsluitend met griekse indices geschreven kunnen worden.

Stel  $u_\beta$  en  $v^\alpha$  zijn grootheden der  $V_{n-1}$ , met kentallen  $u_\lambda$  en  $v^k$  als ze als grootheden der  $V_n$  opgevat worden en  $p^k$ ,  $q_\lambda$  zijn grootheden der  $V_n$  en niet van de  $V_{n-1}$ . Dan definiëren we een operator  $D_\beta$  als volgt

$$12.46) \quad \begin{aligned} D_\alpha u_\beta &= \nabla_\alpha u_\beta = B_{\alpha\beta}^{\mu\lambda} \nabla_\mu u_\lambda; & D_\alpha u_\lambda &= B_\alpha^\mu \nabla_\mu u_\lambda \\ D_\alpha v^\beta &= \nabla_\alpha v^\beta = B_{\alpha\beta}^{\mu\lambda} \nabla_\mu v^\lambda; & D_\alpha v^k &= B_\alpha^\mu \nabla_\mu v^k \\ D_\alpha p^k &= B_\alpha^\mu \nabla_\mu p^k \\ D_\alpha q_\lambda &= B_\alpha^\mu \nabla_\mu q_\lambda \end{aligned}$$

Voor producten gelde de regel van Leibniz. Is dus bijv.  $P_{\beta\lambda}^k$  een grootheid, waarvan het  $k$ -gebied niet in  $V_{n-1}$  ligt, het  $\lambda$ -gebied wel en het  $\beta$ -gebied vanzelfsprekend ook, zodat men ook kan vormen

$$P_{\beta\alpha}^k = B_\alpha^\lambda P_{\beta\lambda}^k \quad \text{en} \quad P_{\mu\lambda}^k \quad \text{maar niet kentallen } P_{\beta\lambda}^\alpha$$

dan is

$$\begin{aligned}
 D_c P^k_{\cdot ba} &= B^{\nu\mu\lambda}_{c\beta\alpha} \nabla_\mu P^k_{\cdot\mu\lambda} \\
 D_c P^k_{\cdot b\lambda} &= B^{\nu\mu}_{c\beta} \nabla_\mu P^k_{\cdot\mu\lambda} \\
 D_c P^k_{\cdot\mu\lambda} &= B^{\nu}_{c\beta} \nabla_\mu P^k_{\cdot\mu\lambda}
 \end{aligned}$$

Het komt dus hier op neer dat links bij  $P$  alleen die indices voorkomen die mogen worden gebruikt en dat rechts de  $B$ 's alleen daar optreden waar latijnse indices staan.

Bij tweemaalige toepassing van  $D$  en alternatie volgt uit (12.46)

$$\begin{aligned}
 D_{[d} D_{c]} u_k &= -R^{\dots a}_{dcb} u_a; D_{[d} D_{c]} u_\lambda = -B^{\nu\mu}_{dc} R^{\dots k}_{\nu\mu\lambda} u_k \\
 D_{[d} D_{c]} p_\lambda &= -B^{\nu\mu}_{dc} R^{\dots k}_{\nu\mu\lambda} p_k \quad (\text{bet. } u_\lambda \text{ en } p_\lambda \text{ zie pag. 71, r. 10 v.o.})
 \end{aligned}$$

en evenzulke formules voor de contravariante vectoren. Daar echter voor  $D_{[d} D_{c]}$  de regel van Leibniz geldt volgt bijv. voor de grootheid  $P^k_{\cdot ba}$  (alleen met de index  $k$  niet in  $V_{n-1}$  liggend):

$$\begin{aligned}
 D_{[d} D_{c]} P^k_{\cdot ba} &= \frac{1}{2} B^{\nu\mu}_{dc} R^{\dots k}_{\nu\mu\lambda} P^{\lambda}_{ba} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} R^{\dots e}_{dcb} P^k_{\cdot ea} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} R^{\dots e}_{dca} P^k_{\cdot be} \\
 D_{[d} D_{c]} P^k_{\cdot b\lambda} &= \frac{1}{2} B^{\nu\mu}_{dc} R^{\dots k}_{\nu\mu\rho} P^{\rho}_{b\lambda} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} R^{\dots a}_{dcb} P^k_{\cdot a\lambda} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} B^{\nu\mu}_{dc} R^{\dots \sigma}_{\nu\mu\lambda} P^k_{\cdot b\sigma} \\
 D_{[d} D_{c]} P^k_{\cdot \rho\lambda} &= \frac{1}{2} B^{\nu\mu}_{dc} R^{\dots k}_{\nu\mu\sigma} P^{\sigma}_{\rho\lambda} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} B^{\nu\mu}_{dc} R^{\dots \sigma}_{\nu\mu\rho} P^k_{\cdot \sigma\lambda} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} B^{\nu\mu}_{dc} R^{\dots \sigma}_{\nu\mu\lambda} P^k_{\cdot \rho\sigma}
 \end{aligned}$$

Deze rekenwijze staat bekend als de  $D$ -symboliek van van der Waerden en Eortolotti. Men mag  $\nabla$  en  $D$  volstrekt niet verwarren. In formules met  $\nabla$  geldt het beginsel dat de betekenis van een term alleen afhangt van het skelet, d.i. de plaatsing van de  $\nabla$ 's, de kernletters en de indices. Verandering van indices betekent verandering van coördinatenstelsel en doet niets af aan de meetkundige betekenis. Bij gebruik van  $D$  wordt dit beginsel opgegeven, de betekenis van een term hangt ook van de keuze der indices af. Zo heeft bijv.  $D_c u_b$  betekenis, maar  $\nabla_c u_b$  is zinloos. Toepassing van  $D$  op  $B^k_{\cdot b}$  en  $n^k$  levert nu:

$$\begin{aligned}
 D_c B^k_{\cdot b} &= B^{\mu\lambda}_{c\beta} \nabla_\mu B^k_{\cdot\lambda} = -B^{\mu\lambda}_{c\beta} \nabla_\mu n_\lambda n^k = h_{c\beta} n^k \\
 D_c n^k &= B^{\mu}_{c\beta} \nabla_\mu n^k = -h^{\cdot k}_c
 \end{aligned}$$

en nogmaals differentierend verkrijgt men uit (12.50)

$$12.52) \quad D_{[d} D_{c]} B_b^k = (D_{[d} h_{c]b}) n^k + h_{[c|b|} D_{d]} n^k$$

of

$$12.53) \quad -\frac{1}{2} R_{dc\ell}^{\dots a} B_a^k + \frac{1}{2} B_{dc}^{\nu\mu} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} B_b^\lambda = (\nabla_{[d} h_{c]b}) n^k - h_{[c|b|} h_{d]}^{\cdot k}$$

splitsende in twee stukken, met de vierde index resp. in en loodrecht op  $V_{n-1}$ :

$$12.54) \quad \boxed{-\frac{1}{2} R_{dc\ell a} + \frac{1}{2} B_{dc\ell a}^{\nu\mu\lambda k} R_{\nu\mu\lambda k} = -h_{[c|b|} h_{d]}^{\cdot k} a]}$$

Stelling van Gauss

$$12.55) \quad \boxed{\frac{1}{2} B_{dc\ell}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda k} n^k = \nabla_{[d} h_{c]b}}$$

Stelling van Codazzi

Voor een  $R_n$  hebben we

$$12.56) \quad \boxed{R_{dc\ell a} = -2 h_{[d|b|} h_{c]}^{\cdot a}]} \quad \text{Gauss}$$

$$12.57) \quad \boxed{\nabla_{[d} h_{c]b} = 0} \quad \text{Codazzi}$$

Voor  $n=3$  volgt uit (12.56) voor  $R_3$  (verg. (12.36) en (9.30))

$$12.58) \quad h_{[d|b|} h_{c]}^{\cdot a} = h^a g_{[d|b|} g_{c]}^{\cdot a]}$$

en dus ingevolge (12.36,37),

$$12.59) \quad k = \frac{1}{R \cdot R}$$

Het product der hoofdkrommingen blijkt dus gelijk te zijn aan de scalaire kromming van de  $V_2$  (theorema egregium van Gauss). Aangezien deze laatste alleen van de  $g_{ab}$  en de afgeleiden van deze naar de  $r^a$  tot de tweede orde afhangt, is  $k$  een invariant bij verbuigingen zonder scheuren. Verbuingen zijn mogelijk omdat voor  $n=3$   $h_{c\ell}$  niet volledig is vastgelegd door  $R_{cd\ell a}$ . Voor  $n>3$  is dit in het algemeen niet meer waar)

De stelling van Codazzi komt aan de orde bij eigenschappen die in verband staan met eerste afgeleiden van  $h_{c\ell}$ . Als voorbeeld nemen we een  $V_2$  in  $R_3$  waarbij  $h_{c\ell}$  in ieder punt de rang 1 heeft. Blijkens (12.56) is dan  $R_{dc\ell a} = 0$ , d.w.z. de meetkunde in de  $V_2$  is dezelfde als die in een plat vlak. Zij nu  $l^a$  een veld van eenheidsvectoren waarvoor  $l^c h_{c\ell} = 0$ . Dan zijn de stroomlijnen van  $l^a$  hoofdtangentenlijnen. Zij  $j^a$  een veld van eenheidsvectoren loodrecht op  $l^a$  dan



ligt de kromtevector  $u^k$  van  $i^a$  en dus ook  $u^k = u^k$  in de richting van  $j^a$ . Ingevolge Codazzi is nu

$$12.60) \quad 0 = \nabla_d i^c h_{c\beta} = (\nabla_d i^c) h_{c\beta}$$

en dus

$$12.61) \quad i^d (\nabla_d i^c) h_{c\beta} = u^c h_{c\beta} = 0$$

Maar aangezien ook  $u^c i_c = 0$  volgt  $u^c = 0$ , d.w.z. de hoofdtangentenlijnen zijn rechte lijnen in  $R_3$ . Het raakvlak in een punt staat loodrecht op  $n^k$ . Nu is echter

$$12.62) \quad 0 = i^c h_{c\beta} = i^c B_{c\beta}^{\mu\lambda} \nabla_\mu n_\lambda = i^c (\nabla_\mu n_\lambda) B_{c\beta}^{\mu\lambda}$$

Maar echter ook  $i^c (\nabla_\mu n_\lambda) n^\lambda = 0$  volgt  $i^c \nabla_\mu n_\lambda = 0$ , d.w.z. het raakvlak is voor alle punten van een hoofdtangentenlijn hetzelfde. De  $V_2$  is dus ontwikkelbaar en de beschrijvenden zijn de hoofdtangentenlijnen.

$h_{c\beta}$  is hier noodzakelijk van de vorm  $\alpha j_c j_\beta$ . Uit Codazzi volgt dus

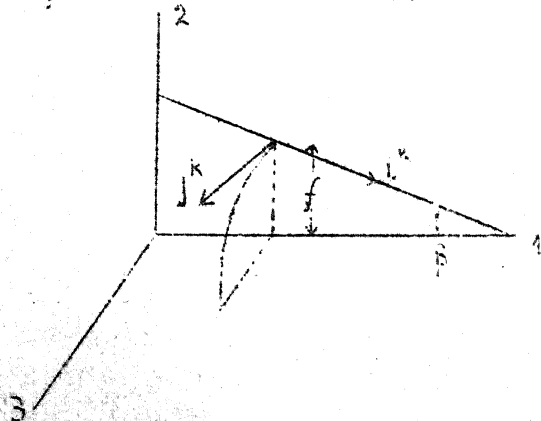
$$12.63) \quad j^\beta \nabla_d j_c + j^\beta \nabla_d j_\beta = -(\nabla_d \log \alpha) j_c j_\beta$$

Overschuiving met  $i^d j^c j^\beta$  leert

$$12.64) \quad -i^d j^c \nabla_c j_\beta = -i^d \nabla_c \log \alpha$$

De kromtevector  $j^c \nabla_c j^a$  van de stroomlijnen van het veld  $j^a$  heeft de richting van  $i^a$ . Links staat dus  $\alpha$  de eerste kromming van deze stroomlijnen.  $\alpha$  is de niet nul wordende hoofdkromming der  $V_2$ .

Voor het voorbeeld der omwentelingsoppervlakken hebben we  $f = 0$  alleen voor  $f'' = 0$  (zie (12.40)). Dan ontstaat een kegel met



$$12.65) \quad \frac{1}{R} = 0 \cdot \frac{1}{R} = -\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} = -\frac{\cos \beta}{f}$$

$$12.66) \quad h_{nn} = 0; \quad h_{nn} = \frac{-f}{\sqrt{1+f'^2}} = -f \cos \beta$$

De stroomlijnen van  $j^k$  zijn cirkels met straal  $f$ , de eerste kromming als krommen der  $V_2$  is dus de projectie van  $\frac{1}{f}$  op het oppervlak, dat is  $\sin \beta / f$ . Verder is langs een para-

meterlijn

$$12.67) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{1}{R} = \frac{1}{f^2} f' \cos \beta \frac{df}{ds} = \frac{1}{f} \tan \beta \cos \beta \cos \beta = \frac{1}{f^2} \sin \beta \cos \beta$$

en dus

$$12.68) \quad \frac{d \log \alpha}{ds} = -\sin \beta / f$$

hetgeen inderdaad klopt met (12.64)

We gaan nog na wanneer een omwentelingsoppervlak constante kromming heeft. Blijkens (12.41) geeft dit in de gewone notatie met  $x$  en  $y$

$$12.69) \quad \frac{1}{k} = - \frac{y(1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dy}{dx}}$$

$$12.70) \quad k y \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

waaruit de eerste integraal

$$12.71) \quad k y^2 = \frac{1}{1 + (\frac{dy}{dx})^2} + C_1$$

en door omrekening

$$12.72) \quad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{k y^2 - C_1}{1 + C_1 - k y^2}} + C_2$$

Dit is een elliptische integraal. Voor  $C_1 = 0$  en  $k > 0$  komt er

$$12.73) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y \sqrt{k}}{\sqrt{1 - k y^2}}$$

met de oplossing

$$12.74) \quad (x - C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{k}$$

voorstellende cirkels met straal  $k^{-\frac{1}{2}}$  en oorsprong in de  $x$ -as.

Voor  $C_1 = -1$ ;  $k = -a^2$ ;  $a > 0$  komt er

$$12.75) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1 - a^2 y^2}}{a y}$$

met de oplossing

$$12.76) \quad x = \sqrt{a^2 - y^2} + \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

Behalve  $g_{ba}$  en  $h_{ba}$  voert men bij een  $V_2$  in  $R_3$  nog een derde tensor in.  $n^k$  is een functie van  $\eta^a$ . Men beschouwt nu het oppervlak

$$12.77) \quad \xi^k = n^k(\eta^a)$$

Dit is een bol met straal 1 en ieder punt van de  $V_2$  wordt afgebeeld op het punt met dezelfde  $\eta^a$  van die bol. Dit heet de spherische afbeelding van de  $V_2$ . Voor de fundamentealtensor op de bol vinden we volgens (11.21):

$$12.78) \quad a_{cb} = \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^b} (\partial_c n^k) \partial_b n_k = h_c^a h_{ba}$$

Men noemt  $a_{cb}$  de derde fundamentealtensor der  $V_2$ . Blijkens (12.78)

zijn de hoofdkromterichtingen ook hoofdassen van  $a_{\alpha\beta}$ . Legt men dus een lokaal rechthoekig coördinatenstelsel met eenheidsvectoren  $\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta$  in de hoofdkromterichtingen, dan is t.o.v. dat coördinatenstelsel

$$(12.79) \quad \begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= 1; \quad g_{\beta\beta} = 1; \quad g_{\alpha\beta} = 0 \\ h_{\alpha\alpha} &= k_\alpha^2; \quad h_{\beta\beta} = k_\beta^2; \quad h_{\alpha\beta} = 0 \\ a_{\alpha\alpha} &= k_\alpha^2; \quad a_{\beta\beta} = k_\beta^2; \quad a_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned}$$

en er moet dus een betrekking bestaan van de vorm

$$(12.80) \quad g_{\beta\alpha} + p h_{\beta\alpha} + q a_{\beta\alpha} = 0$$

uit (12.79) volgt

$$(12.81) \quad \begin{aligned} 1 + p k_\alpha^2 + q k_\alpha^2 &= 0 \\ 1 + p k_\beta^2 + q k_\beta^2 &= 0 \end{aligned}$$

met de oplossing (voor  $f \neq 0$ )

$$(12.82) \quad p = - \frac{2 f_{,\alpha}}{f}; \quad q = \frac{f_{,\beta}}{f}$$

zodat ten slotte volgt voor het verband tussen de drie tensoren

$$(12.83) \quad k g_{\beta\alpha} - 2 H h_{\beta\alpha} + a_{\beta\alpha} = 0$$

In een  $V_n$  stelt  $n! v^{[k_1] \dots v^{[k_n]}$  het parallelotoop voor van de vectoren  $v^{[k_1]}, \dots, v^{[k_n]}$  in een lokale  $R_n$ . Laat nu  $y^{k_1 \dots k_n}$  en  $i_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  de contra- en covariante eenheids- $n$ -vector voorstellen, dus  $y^{\lambda_1 \dots \lambda_n} = 1$  en  $i_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = 1$  in lokale orthogonale coördinaten. Dan is

$$(12.84) \quad \alpha_f^{-1/2} i_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = n_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \quad (\text{zie (3.29)})$$

omdat deze vergelijking in orthogonale coördinaten geldt en dus ook algemeen. Zij nu de inhoud van het boven ingevoerde parallelotoop  $\Omega$  dan is

$$(12.85) \quad n! v^{[k_1] \dots v^{[k_n]} = \Omega y^{k_1 \dots k_n}$$

en derhalve

$$(12.86) \quad \Omega = v^{[k_1] \dots v^{[k_n]} i_{k_1 \dots k_n} = n! \alpha_f^{1/2} v^{[1] \dots v^{[n]}}$$

Neem nu in  $V_n$  het parallelotoop van de lijnelementen  $d\xi^1, \dots, d\xi^n$  in de coördinatenkrommen, dan is  $v^1 = d\xi^1; v^2 = 0; \dots; v^n = 0$ , enz. en de inhoud is dus

$$(12.87) \quad \alpha_f^{1/2} d\xi^1 \dots d\xi^n$$

Passen we dit nu toe in de  $V_2$  in  $R_3$ . Dan is  $d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_f^{1/2} d\eta^1 d\eta^2$  het oppervlak van het element der  $V_2$  en  $d\bar{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{1/2} d\eta^1 d\eta^2$  het oppervlak van het spherische beeld ( $\alpha = \det(a_{\alpha\beta})$ ). Nu is echter

$$(12.88) \quad a_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} g^{\text{ad}} h_{\alpha\beta}$$

en dus

(12.89)

$$u = \frac{f^2}{g'} = k^2 g'$$

zodat

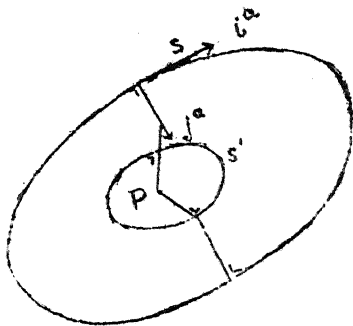
(12.90)

$$d\bar{w} = k dw$$

Is  $a_{ba} :: g_{ba}$  dan is de sferische afbeelding conform, d.w.z. hoeken blijven invariant. Uit (12.83) volgt dat de afbeelding conform is voor een punt der  $V_2$  indien aldaar  $h_{ba} :: g_{ba}$  is (navelpunt) of indien  $H=0$  is. Is  $H$  overal  $= 0$ , d.w.z. zijn de hoofdkrommingen overal tegengesteld gelijk, dan is de afbeelding overal conform (minimaaloppervlakken, behandeling volgt later).

### § 13. De stelling van Gauss-Bonnet in een gewone $V_2$ .

In een  $V_2$  met coördinaten  $\eta^a$ ;  $a = 1, 2$  en definitie fundamenteeltensor  $g_{ab}$  beschouwen we een kromme  $S$  die zich continu tot een punt laat samen-trekken en een kromme  $S'$  binnen  $S$ . Verder beschouwen we een punt  $P$  binnen  $S'$  en een stelsel krommen door  $P$  die het vlak binnen  $S$  geheel vul-len en  $S$  en  $S'$  loodrecht snijden en in die snijpunten een kromming  $\kappa$  hebben. Van alle functies verlangen we dat zij continu zijn en overal een voldoende aantal continue afgeleiden hebben. Behalve  $S$  en  $S'$  tekenen



we alle krommen binnen  $S$  die overal loodrecht zijn op de krommen door  $P$ . De eenheidsraakvector (zin rechtsom) zij  $i^a$  en de eenheidsraakvector van de krommen door  $P$  (zin naar binnen) zij  $j^a$ .  $i^a$  en  $j^a$  zijn dan velden die overal op en binnen  $S$  behalve in  $P$  continu en een voldoende aantal malen differentieerbaar zijn. Aangenomen

$(\nabla_b i^a) i_a = 0$ ,  $(\nabla_b j^a) j_a = 0$  en  $(\nabla_b i^a) j_a = -(\nabla_b j^a) i_a$  bestaan er vergelijkingen van de vorm

$$\begin{aligned} 13.1) \quad a) \quad \nabla_c i_b &= \kappa i_c j_b + \lambda j_c j_b \\ b) \quad \nabla_c j_b &= -\lambda j_c i_b - \kappa i_c i_b \end{aligned}$$

en bij overschuiving met  $i^c$  resp.  $j^c$  ziet men dat  $\kappa$  de eerste kromming van de  $i$ -congruentie is en  $|\lambda|$  de eerste kromming van de  $j$ -congruentie. Op  $S$  en  $S'$  is dus krachtens onderstelling  $\lambda = 0$ . We gaan nu de lijnin-tegralen

$$\int_L \kappa i_b d\eta^b ; \int_L \lambda i_b d\eta^b$$

(13.2)

langs een gesloten kromme  $L$ , beschouwen. We gebruiken de stelling van Stokes in een iets andere vorm dan in § 7. In een  $X_n$  is de lijnintegraal van een covariante vector langs een gesloten kromme gelijk aan de oppervlakte integraal van de rotatie over ieder oppervlak dat door de kromme

wordt begrensd

$$13.3) \quad \int \partial_{[\mu} w_{\lambda]} df^{\mu\lambda} = \int w_{\lambda} d\xi^{\lambda}$$

Hierin is  $df^{\mu\lambda}$  de bivector van het oppervlak element met een zin gelijk aan de integratiezin langs de kromme. In een  $A_n$  mag  $\partial_{[\mu} w_{\lambda]}$  worden geschreven in plaats van  $\partial_{[\mu} w_{\lambda]}$  en in onze  $V_2$  luidt de stelling dus

$$13.4) \quad \int_{V_2} \nabla_{[c} w_{b]} j^{cb} d\sigma = \int_{\gamma_1} w_b d\eta^b$$

waarin  $j^{cb}$  de eenheidsbivector is (Notabene:  $\nabla_d j^{cb} = 0$ ) en  $d\sigma$  het gewoon gemeten oppervlak van het element. Nu is hier  $j^{cb} = +i^{[c} j^{b]}$

Voeren we dus  $\kappa i_b$  en  $\lambda j_b$  in voor  $w_b$  dan is

$$a) \quad (\nabla_{[c} \kappa i_{b]}) j^{cb} = \nabla_c \kappa i_b j^{cb} = -\nabla_c \kappa j^c$$

13.5)

$$b) \quad (\nabla_{[c} \lambda j_{b]}) j^{cb} = \nabla_c \lambda j_b j^{cb} = -\nabla_c \lambda i^c$$

$$= -\nabla_d i^d i^c j^c \nabla_c j_b$$

Nu is ingevolge (13.1)

$$13.6) \quad \nabla_d i^d = \lambda \quad ; \quad \nabla_d j^d = -\kappa$$

zodat

$$a) \quad -\nabla_d j^d j^b i^c \nabla_c i_b = \kappa^2 - j^d j^b \nabla_d i^c \nabla_c i_b$$

$$= \kappa^2 - j^d j^b (\nabla_d i_b) j^c j^c \nabla_c i_b$$

$$- j^d j^b i^c \nabla_d \nabla_c i_b$$

13.7)

$$b) \quad -\nabla_d i^d i^b j^c \nabla_c j_b = \lambda^2 - i^d i^b \nabla_d j_c i^c \nabla_c j_b$$

$$- i^d i^b j^c \nabla_d \nabla_c j_b$$

$$= \lambda^2 - \kappa^2 - i^d i^b j^c \nabla_d \nabla_c j_b$$

Nu is echter

$$13.8) \quad i^b \nabla_d \nabla_c j_b = -j^b \nabla_d \nabla_c i_b$$

omdat  $i^b j_b = 0$  en  $(\nabla_d i^b) \nabla_c j_b = 0$ , zodat (verg. (9.30))

$$13.9) \quad (\nabla_{[c} \kappa i_{b]} + \nabla_{[c} \lambda j_{b]}) j^{cb} = -2 j^d j^b i^c \nabla_d \nabla_c i_b$$

$$= -2 j^d j^b i^c \nabla_d \nabla_c i_b$$

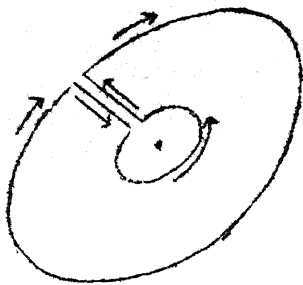
$$= -2 j^d j^b j^c j^a (\nabla_d \nabla_c j_a - \nabla_c \nabla_d j_a)$$

$$= -2 j^d j^b j^c j^a (\nabla_d \nabla_c j_a - \nabla_c \nabla_d j_a)$$

in ingevolge Stokes

$$13.10) \quad \int (\kappa i_b + \lambda j_b) d\eta^b = - \int \kappa d\sigma$$

voorlopig hebben we van de conventies  $i^a$  en  $j^a$  alleen gebruikt dat ze onderling orthogonaal zijn. Nu gaan we de interpretatie van  $i^a$  speciaal lezen en wel eerst rond  $S$ , dan langs een  $j$ -kromme rond  $S'$ , daar rond



in tegengestelde zin en terug naar  $S$  langs dezelfde  $j$ -kromme. Langs de  $j$ -kromme heffen de integralen elkaar op en op  $S$  en  $S'$  is  $\lambda = 0$ . Dus volgt

$$(13.11) \int_S k ds - \int_{S'} k ds = \int_{\partial S} k i_g d\eta_g - \int_{\partial S'} k i_g d\eta_g = - \int_{\partial S'} k d\sigma$$

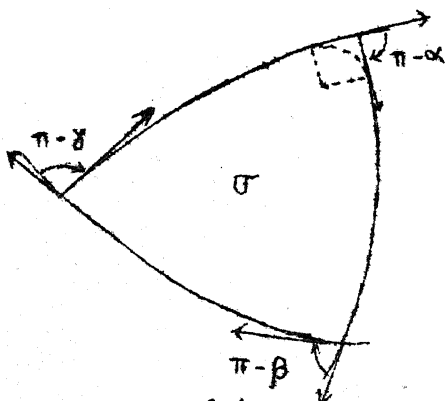
waarin  $\partial S'$  nu het gebied is dat door  $S$  en  $S'$  wordt begrensd.  $k$  is op  $S$  en op  $S'$  de hoekverdraaiing naar rechts van de raaklijn t.o.v. van een pseudoparallel meebewegend stelsel per lengte-eenheid. Laat men dus  $S'$  samentrekken tot het punt  $P$  dan is

$$(13.12) \quad \lim_{\partial S' \rightarrow P} \int_{\partial S'} k ds = 2\pi$$

en daaruit volgt

$$(13.13) \quad \boxed{\int_S k ds = 2\pi - \int_{\partial S} k d\sigma}$$

waarin  $\sigma$  nu het door  $S$  omsloten gebied is. Dit is de stelling van Gauss-Bonnet.



Neemt men voor  $S$  drie elkaar snij-dende geodetische lijnen, dan gaat deze manier van werken niet langer op omdat in een hoekpunt de raaklijn discontinu verspringt. Vervangt men echter het hoekpunt door een boogje van een "geodetische" cirkel, d.i. een kromme waarvan de punten gelijke afstanden hebben tot een vast punt, dan wordt bij de limiet

de portie van  $\int k ds$  in dat hoekpunt juist gelijk aan de hoek  $\pi - \alpha$  waarover de raaklijn gedraaid is (buitenhoek van de driehoek). Langs die zijden is  $k = 0$  zodat de zijden geen bijdrage leveren. Bijgevolg is nu

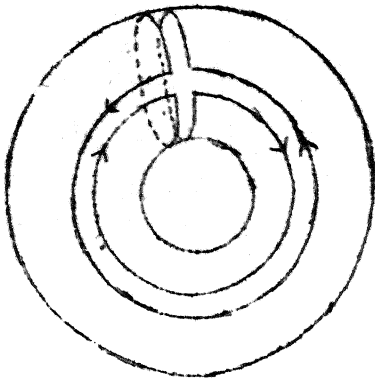
$$3\pi - \alpha - \beta - \gamma = 2\pi - \int_{\partial S} k d\sigma \quad \text{of}$$

$$(13.14) \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\partial S} k d\sigma$$

In een  $V_2$  van constante kromming  $k$  is dus de som van de hoeken van een geodetische driehoek  $> 180^\circ$  voor  $k > 0$  en  $< 180^\circ$  voor  $k < 0$ . Voor een bol in  $R_3$  is (13.14) de bekende formule voor het spherisch excès.

Is een  $V_2$  gesloten en kan men door één vloeiende kromme de  $V_2$  verde-len in twee stukken die zich elk tot een punt laten samentrekken, dan kan men de stelling op beide helften toepassen. De integraal over de begrenzing komt dan tweemaal voor met tegengesteld teken en valt weg zodat bij integratie over de gehele  $V_2$

13.15)



Op een ring kan men door één kromme met 4 rechte hoeken maken dat  $V_2$  zich tot één punt laat samentrekken. In die rechte hoeken draait de raaklijn viermaal over  $+\frac{\pi}{2}$ , de bijdrage van die hoekpunten in de integraal is dus  $2\pi$ . Bijgevolg is, daar de rest van de lijnintegraal zichzelf opheft,

13.16)

$$\int_C k d\sigma = 2\pi - 2\pi = 0$$

Op dezelfde manier bewijst men dat een bol met  $p$  "hengsels" een oppervlakte integraal  $4\pi(1-p)$  heeft.  $p$  heet naar Riemann het geslacht van de gesloten  $V_2$ .

#### § 14. Het integrabiliteitstheorema voor $V_2$ in de gewone $R_3$

Zijn van een  $V_2$  zowel  $g_{ba}$  als  $h_{ba}$  gegeven als analytische functies der  $\eta^a$  in een  $\mathcal{H}(\eta_0^a)$  dan laat zich de  $V_2$  in die omgeving realiseren op een oppervlakte deel van een gewone  $R_3$  en dit deel is vastgelegd op translaties en rotaties na. De grondvergelijkingen zijn

$$14.1) \quad D_c B_b^k = h_{cb} n^k \quad (12.50)$$

$$14.2) \quad D_c n^k = -h_c^{\cdot a} B_a^k \quad (12.51)$$

$$14.3) \quad {}^1 R_{dcba} = -2 h_{[d} h_{c]a} \quad (12.56) \text{ Gauss}$$

$$14.4) \quad D_{[d} h_{c]} b = 0 \quad (12.57) \text{ Codazzi}$$

We beschouwen  $\xi^k$  en  $\eta^k$  ( $k$ ) = gewoon cartesisch coördinaatsstelsel in  $R_3$ ) als de 6 onbekende functies der  $\eta^a$ . Dan moeten deze voldoen aan de differentiaalvergelijkingen (14.1,2), uitgeschreven

$$14.5) \quad \partial_c \partial_b \xi^k = \Gamma_{cb}^a \partial_a \xi^k + h_{cb} n^k$$

$$14.6) \quad \partial_c n^k = -h_c^{\cdot a} \partial_a \xi^k$$

De integrabiliteitscondities zijn de vergelijkingen die vastleggen dat de hogere afgeleiden van  $\xi^k$  en  $\eta^k$  zich door differentiatie van (14.5,6) als functies van de  $\eta^a$ ,  $\xi^k$ ,  $\partial_b \xi^k$  en  $n^k$  laten uitdrukken. Zij luiden hier

$$14.7) \quad 0 = \partial_{[d} \partial_{c]} \partial_b \xi^k = \{ (\partial_d \Gamma_{cb}^a) + \Gamma_{bc}^e \Gamma_{de}^a \} \partial_a \xi^k + (\partial_{[d} h_{c]} b) n^k + h_{[c} b \partial_{d]} n^k =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} R_{dcl}^{\cdot \cdot \cdot a} \partial_a \xi^k + (D_{[d} h_{c]l}) n^k \\
 &\quad - h_{l[c} h_{d]}^{\cdot \cdot \cdot a} \partial_a \xi^k \\
 14.8) \quad 0 &= \partial_{[d} \partial_{c]} n^k = -(\partial_{[d} h_{c]}^{\cdot \cdot \cdot a}) \partial_a \xi^k - \\
 &\quad - h_{l[c}^{\cdot \cdot \cdot a} \Gamma_{d]}^b \partial_b \xi^k - h_{l[c}^{\cdot \cdot \cdot a} h_{d]}^b \partial_a n^b \\
 &= -(\partial_{[d} h_{c]}^{\cdot \cdot \cdot b}) \partial_b \xi^k - h_{l[c}^{\cdot \cdot \cdot a} h_{d]}^b \partial_a n^b
 \end{aligned}$$

en zij zijn identiek vervuld ingevolge (14.3,4). Geeft men de waarden van  $\xi^k$ ,  $n^k$  en  $\partial_l \xi^k$  voor  $\eta^a = \eta^a$ , zodanig dat in dat punt

$$\begin{aligned}
 a) \quad g_{\lambda k} n^\lambda n^k &= 1 \\
 14.9) \quad b) \quad g_{\lambda k} (\partial_l \xi^\lambda) \partial_a \xi^k &= g_{la} : g_{\lambda k} = \begin{cases} 1 \text{ voor } \lambda = k \\ 0 \text{ voor } \lambda \neq k \end{cases} \\
 c) \quad g_{\lambda k} n^\lambda \partial_l \xi^k &= 0
 \end{aligned}$$

d.w.z. geeft men in  $R_3$  één punt, de normaal in dat punt en bijv.

$B_1^1 : B_1^2 : B_1^3$ , dat is dus de richting van de raakvector aan de parameterlijnen van  $\eta^1$ , dan leggen de vergelijkingen (14.9 b,c) alle waarden  $B_l^k$  vast. Brengt men in (14.9) alles naar links dan zijn de afgeleiden der linkerleden naar  $\eta^b$  nul ingevolge (14.5,6), de voorwaarden (14.9) zijn dus niet alleen in  $\eta_c^a$  vervuld maar in een  $\eta_c^a(\eta_c^a)$ . De  $V_2$  in  $R_3$  is nu vastgelegd op de keuze van het punt, het raakvlak en de stand van de raaklijn in dat punt aan de parameterlijnen van  $\eta^1$  na, d.w.z. op translaties en rotaties na. Met name zijn geen verbuigingen toegelaten want daarbij verandert  $h_{cl}$ .



# Litteratuur Differentiaalmeetkunde

- 1887-'96 G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris.
- 1898 G. Ricci, Lezioni sulla teoria delle superficie, Verona-Padova.
- 1899 L. Bianchi, Vorl. über Differentialgeometrie, Leipzig. Vertaling der italiaansche uitgave van 1893 Pisa, tweede italiaansche druk 1902.
- 1901 G. Ricci en T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu, Math. Ann. 54. (1901) 125-201.
- 1901-'02 G. Scheffers, Anwendungen der Diff. und Int. Rechnung auf Geometrie, Leipzig.
- 1913 R. v. Lilienthal, Vorl. über Diff. Geom. I, II, Teubner.
- 1921 W. Blaschke, Vorl. über Diff. Geom. I, Berlin.
- 1923 R. Weitzenböck, Invariantentheorie, Noordhoff.
- 1924 J.A. Schouten, Der Ricci-kalkül, Springer Overdruk U.S.A. 1942, derde druk 1951.
- 1925 T. Levi-Civita, Lezioni di calc. diff. abs., Rome.
- 1926 J.E. Campbell, Differential Geometry, Oxford, Clar. Press.
- 1926 L.P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press.
- 1927 L.P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, Ann. Math. Soc. Coll. Publ.
- 1927 C.E. Weatherburn, Diff. Geometry of 3 dimensions, Cambr. Univ. Press.
- 1930 A. Duschek en W. Mayer, Lehrbuch der Diff. Geom. Teubner.
- 1931 A.J. Mac Connell, Appl. of the Abs. Diff. Calc., Blackie & Sons, London.
- 1932 L. Bieberbach, Differentialgeometrie, Teubner.
- 1932 O. Veblen en J.M.C. Whitehead, The foundations of diff. geom. Cambridge.
- 1934 D.J. Struik, Theory of linear connexions, Springer.
- 1934 T.Y. Thomas, The differ. inv. of gener. spaces, Cambr. Univ. Pr.
- 1935 J.A. Schouten en D.J. Struik, Einführung etc. Noordhoff.
- 1939 V. Hlavaty, Differentialgeometrie, Noordhoff.
- 1946 E. Cartan, Leçons sur la géométrie différentielle, Bucarest.
- 1947 G. Vranceanu, Géométrie différentielle, Bucarest.
- 1948 W. Haack, Differentialgeometrie I, II, Wolfenbüttel (nooddruk).
- 1950 J.A. Schouten, Tensorcalculus for physicists, Oxford Clar. Pr.